

Trabajo Final de Grado

## **Grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales**

# **Estudio de la motorización eléctrica de una bicicleta**

### **MEMORIA**

**Autor:** Nicolás Miralles Anguera de Sojo  
**Directora:** Míriam Febrer Nafria  
**Convocatoria:** Enero 2020



Escola Tècnica Superior  
d'Enginyeria Industrial de Barcelona





## Resumen

El presente documento consiste en el estudio previo a la motorización de una bicicleta, concretamente una *mountain bike* modelo **Rockrider 5.2** que habitualmente lleva solidario un carro de dos ruedas con un niño, analizando la relación de fuerzas y velocidades entre el ciclista y la bicicleta antes de la instalación del motor para poder definir las características que debe cumplir el motor escogido.

Previo al análisis de fuerzas se ha realizado una breve documentación acerca de la historia de la bicicleta y la aparición de los modelos eléctricos, así como los tipos de motores eléctricos que existen y la legislación vigente acerca de estos.

El análisis de las fuerzas presentes en la bicicleta que debe superar el ciclista se ha dividido en dos situaciones, el análisis de las fuerzas teniendo en cuenta únicamente al ciclista y a la bicicleta, y el análisis teniendo en cuenta que el carro de dos ruedas con el niño va solidario a la bicicleta, estudiando las fuerzas tanto en la bicicleta como en el carro. Para ambas situaciones se han definido tres condiciones de movimiento basadas en análisis directo de situaciones reales. Dicho análisis se ha realizado mediante los teoremas vectoriales. Una vez estudiadas las fuerzas presentes, se ha analizado la relación de marchas para superar dichas fuerzas y alcanzar las diferentes velocidades.

Con los resultados del análisis de fuerzas se ha podido observar que los factores que más influyen son la presencia del carro y los aumentos de pendiente, con lo que se ha podido definir el tipo de motor deseado para poder reducir el esfuerzo necesario por parte del ciclista, realizándose un estudio de mercado y un análisis de las propiedades de los motores seleccionados, para concluir con la opción del motor que mejores prestaciones presenta para ser instalado en la bicicleta.

# Sumario

<b>SUMARIO</b>	<b>4</b>
<b>1. GLOSARIO</b>	<b>7</b>
<b>2. INTRODUCCIÓN</b>	<b>8</b>
2.1. Motivación del proyecto .....	8
2.2. Objetivos del proyecto .....	9
2.3. Metodología .....	9
<b>3. LA BICICLETA CONVENCIONAL Y LA ELÉCTRICA</b>	<b>11</b>
3.1. Breve historia y evolución .....	11
3.2. Tipos de bicicleta eléctrica .....	15
3.3. Legislación .....	18
<b>4. ANÁLISIS DINÁMICO</b>	<b>20</b>
4.1. Hipótesis y simplificaciones .....	22
4.2. Bicicleta y ciclista .....	27
4.2.1. Conjunto ciclista y cuadro .....	27
4.2.2. Rueda delantera .....	29
4.2.3. Rueda trasera .....	30
4.3. Bicicleta y carro .....	31
4.3.1. Conjunto ciclista y cuadro de la bicicleta .....	31
4.3.2. Ruedas delantera y trasera de la bici .....	32
4.3.3. Conjunto cuadro del carro y niño .....	33
4.3.4. Rueda del carrito .....	33
4.4. Relación par-fuerza y velocidad-cadencia* del ciclista .....	34
<b>5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	<b>36</b>
5.1. Parámetros del sistema y condiciones de movimiento .....	36
5.2. Resultados del análisis dinámico .....	38
5.2.1. Sistema bicicleta y ciclista .....	38
5.2.2. Sistema bicicleta y carro .....	40
5.3. Comparación de resultados .....	41
5.4. Resultados de la fuerza y cadencia* del ciclista .....	42
<b>6. MOTOR</b>	<b>48</b>
6.1. Características deseadas .....	48
6.2. Estudio de mercado .....	49

6.3. Elección .....	54
<b>7. IMPACTO ECONÓMICO .....</b>	<b>57</b>
7.1. Coste de personal .....	57
7.2. Coste de equipamiento .....	57
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>59</b>
Trabajos futuros .....	59
<b>AGRADECIMIENTOS .....</b>	<b>60</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>61</b>
Referencias bibliográficas .....	61
Bibliografía complementaria .....	61
<b>1. ANEXOS .....</b>	<b>62</b>
1.1. Centros de masas .....	62
1.1.1. Cuadro de la bicicleta .....	62
1.1.2. Conjunto ciclista y cuadro de la bicicleta .....	63
1.1.3. Conjunto niño y chasis del carro .....	67
1.2. Códigos utilizados .....	69



# 1. Glosario

La primera vez que aparezca una palabra del glosario en el texto irá seguida de un asterisco '\*' para indicarlo.

## Abreviaciones y símbolos

**MTB:** Abreviatura que hace referencia a las bicicletas de montaña, también conocidas como *Mountain bike*.

**C.m.:** Centro de masas.

**TCM:** Teorema de la cantidad de movimiento.

**TMC:** Teorema del momento cinético.

**Cd:** Coeficiente aerodinámico de *drag*.

$\rho_{aire}$ : Densidad del aire.

**DGT:** Dirección General de Tráfico.

## Vocabulario específico

**Síndrome de Down:** Trastorno genético causado por la presencia de una copia extra del cromosoma 21 (o una parte del mismo), en vez de los dos habituales, por ello se denomina también trisomía del par 21.

**Polímata:** Persona con grandes conocimientos en diversas materias científicas o humanísticas.

**Cadencia:** Velocidad de pedaleo.

**Desarrollo métrico:** Distancia recorrida por la bicicleta en cada pedaleada.

## 2. Introducción

### 2.1. Motivación del proyecto

Este proyecto consiste en un estudio dentro del marco teórico sobre la motorización de una bicicleta *Mountain Bike* (MTB\*) personal, con el fin de reducir el esfuerzo necesario requerido por el ciclista. Actualmente el deporte de la bicicleta de montaña está en pleno auge, y esto se debe en parte gracias a la aparición de MTB motorizadas. El ciclismo de montaña es un deporte que hasta ahora requería una muy buena forma física, ya que uno se encuentra constantemente con subidas de gran desnivel, en su mayoría acompañadas de raíces y piedras, lo cual dificulta el ascenso, y además las excursiones en bicicleta por lo general aspiran a recorrer largas distancias, ya que es uno de los atractivos de este deporte. Este hecho provocaba que únicamente practicasen este deporte gente entrenada y en buena forma. Pero, con la aparición de MTB eléctricas, dicho deporte amplía de forma considerable sus usuarios, ya que el motor reduce notablemente el esfuerzo a realizar de la persona, sin anular completamente la necesidad de realizar ejercicio.

Como suele suceder, al tratarse de una implementación reciente, las MTB eléctricas tienen un precio muy elevado y, dado que el proyecto pretende ser un estudio para una puesta en práctica real, una de las grandes motivaciones es analizar si se obtienen las prestaciones requeridas con un precio de adquisición menor.

Por otro lado, la pretensión de motorizar una MTB también viene impulsada debido a una circunstancia personal del autor. El ciclismo de montaña es una actividad frecuente en su familia, dándose el caso particular que el hermano menor, de 13 años, tenga Síndrome de Down\*, por lo que no ha aprendido a ir solo en bicicleta. Para poder participar de esta actividad es preciso enganchar un carro, que le permite pedalear, al sillín de una bicicleta la cual lo arrastra, por lo que la persona que monta dicha bicicleta debe realizar mucho más esfuerzo de lo normal. Dada las dimensiones del carro y la estabilidad tanto del carro como del niño, los senderos de montaña no son transitables en esta situación, lo que provoca que dicha bicicleta únicamente circule por ciudad o por caminos y pistas de montaña bien pavimentados y sin cambios bruscos de desnivel, lo cual no quita importancia al esfuerzo extra que se debe realizar para arrastrar el carro con el niño. Por este motivo una bicicleta motorizada sería de gran ayuda y de ahí la principal motivación de este proyecto.



## 2.2. Objetivos del proyecto

El objetivo principal del proyecto consiste en seleccionar un motor eléctrico que pueda ser instalado en una MTB *Rockrider 5.2* para asistir al ciclista. Para poder seleccionar dicho motor se requiere:

- Definir las condiciones de movimiento a estudiar
- Hacer un análisis dinámico en diferentes situaciones para comprender y estudiar la magnitud de las fuerzas que actúan en la bicicleta y poder determinar de esta manera la ayuda que debe proporcionar la instalación del motor
- Realizar un análisis cinemático de las relaciones de transmisión para garantizar las condiciones de movimiento definidas
- Estudiar los diferentes motores que proporciona el mercado así como sus características para poder seleccionar el modelo más adecuado

## 2.3. Metodología

Para lograr los objetivos mencionados anteriormente, se han seguido diferentes pasos. El primero ha sido realizar una recopilación de información acerca de la invención de la bicicleta, su evolución y la aparición de los primeros modelos eléctricos, para después así poder definir los tipos de bicicletas eléctricas y la legislación que las rige para mantenerse siempre dentro del marco legal a la hora de seleccionar el motor.

El segundo paso ha sido realizar un análisis dinámico para evaluar las fuerzas existentes en la bicicleta que debe superar el ciclista. Concretamente se han realizado dos análisis dinámicos, uno contemplando únicamente el conjunto ciclista y bicicleta, y otro contemplando el conjunto ciclista, bicicleta, niño y carro solidario a la bicicleta para poder posteriormente comparar los resultados obtenidos en cada análisis. Ambos análisis se han realizado en tres situaciones de pendiente y velocidad diferente, basándose en situaciones reales escogidas por observación directa del autor. Para obtener las fuerzas a partir del movimiento, se han aplicado los **Teoremas Vectoriales** sólido a sólido, los cuales permiten encontrar las fuerzas y momentos de enlace. La base vectorial utilizada para realizar los cálculos siempre se ha considerado fija al suelo. Los teoremas vectoriales son dos:

1. El **Teorema de la Cantidad de Movimiento (TCM\*)**. El TCM puede verse como una versión genérica de la segunda ley de Newton, que dice: *“La suma de fuerzas externas que actúan sobre un sistema de materia constante, es igual a la variación de su cantidad de movimiento”*. Su formulación es:

$$\sum_{sist} \overrightarrow{F_{ext}} = \dot{\overrightarrow{p}}_{sist} = m_{sist} \cdot \dot{\overrightarrow{v}}(G) = m_{sist} \overrightarrow{a}(G)$$

2. **El Teorema del Momento Cinético (TMC\*).** El TMC se aplica en un punto, y dice:  
*“La suma de momentos externos sobre un sistema de materia constante es igual a la variación del vector momento cinético”.* El TMC se formula:

$$\sum_{sist} \overrightarrow{M_{ext}(B)} - \overrightarrow{BG}_{sist} \times m_{sist} \overrightarrow{a}(B) = \dot{\overrightarrow{BK}}_{sist}$$

Con los resultados del análisis se ha estudiado la relación de marchas para garantizar las velocidades requeridas y la fuerza necesaria del ciclista, pudiéndose comparar las diferentes situaciones y pudiendo definir de forma concreta las características que se requieren del motor.

Llegados a este punto, se han definido las características que se pretenden del motor y se ha realizado un estudio de mercado de los diferentes motores en función de estas. Estas características son la potencia que proporciona el motor, la autonomía que presenta y su precio, mostrándose en el documento únicamente los motores competitivos en referencia a estas tres propiedades, escogiendo finalmente el motor que mejores prestaciones presenta.

### 3. La bicicleta convencional y la eléctrica

Antes de empezar con el estudio propio del proyecto, es preciso conocer más acerca de la invención de la bicicleta y su evolución. Desde los inicios de la historia del ser humano, este ha pretendido siempre encontrar formas de moverse más rápidamente que a pie o corriendo minimizando el esfuerzo. Los primeros inventos en este ámbito vinieron de la mano de la tracción animal, hasta ir progresando y llegar a los vehículos de hoy en día impulsados en su mayoría por combustibles fósiles o por medio de la electricidad. Es en medio de esta búsqueda donde surge la bicicleta. Desde el momento de su invención, la bicicleta se ha utilizado como medio de transporte o como entretenimiento, destacando más una funcionalidad que la otra en función del contexto histórico.

#### 3.1. Breve historia y evolución

Los inicios de la bicicleta son algo confusos, ya que lo que es la invención y evolución de la bicicleta moderna se conoce con claridad, y data de principios del siglo XIX. Sin embargo, antes de estas fechas se tiene constancia en diferentes culturas de invenciones que podrían ser el precedente de lo que hoy en día conocemos como bicicleta. No se va a entrar en detalle en estas invenciones, ya que están muy lejos de aportar conocimiento relevante para lo que es la evolución de la bicicleta moderna. El único caso que se va a tratar previo al siglo XIX es el caso de Leonardo da Vinci (1452-1519) debido a su gran importancia.

Leonardo fue un polímata\* muy importante del Renacimiento italiano. Entre su gran legado, Leonardo dejó el libro *Códice Atlántico*, que se trata de una obra encuadrada en la que se recogen dibujos y escrituras de carácter científico y en la que se encuentran los inventos más creativos del autor. En 1966, durante una restauración del libro por parte de los monjes Basilios, hallaron dos páginas que se encontraban enganchadas. En el interior de esas páginas se hallaba un boceto de una bicicleta con grandes similitudes a la bicicleta moderna, ya que el mecanismo de transmisión funcionaba por medio de pedales y una cadena muy similar a las presentes en las bicicletas de hoy en día. Este hecho, a pesar de que el invento no se llevase a cabo o no triunfase en la sociedad del momento y esto provocase la pérdida y el olvido de la invención, convertiría a Leonardo en el inventor de la bicicleta adelantándose en cuatro siglos a la creación del siguiente modelo.

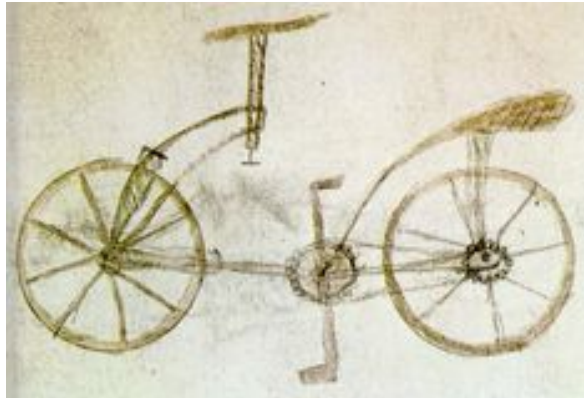


Fig.1. Boceto de la bicicleta atribuida a Leonardo Da Vinci. Imagen extraída de *bicihome.com*

Sin embargo, en 1997 el profesor Hans-Erhard Lessing, expuso durante una conferencia en Glasgow que el boceto presente entre las páginas 132 y 133 había sido falsificado. Lo único que realmente había entre las páginas que habían permanecido pegadas eran dos círculos, y alguien decidió aprovechar el dibujo para elaborar y atribuir a Da Vinci la bicicleta. Más adelante se analizó la tinta de la página en cuestión y se encontraron ingredientes que no se utilizaron hasta el siglo XIX en adelante, demostrándose que realmente la invención no pertenecía a Leonardo. El profesor señaló que el motivo de la falsificación era el de poderse atribuir por parte de los italianos la invención de la bicicleta.

El primer antecesor real de la bicicleta es la Draisiana o velocípedo, también conocido como máquina de correr, ya que se impulsaba por el contacto directo de los pies con el suelo, como los actuales modelos de motos o bicicletas infantiles sin pedales. Este invento alemán, fue publicado en 1817 por el ingeniero agrónomo Karl Freiherr von Drais (1785-1851). Las grandes aportaciones que realizó Von Drais fueron dos:

1. El hecho de disponer únicamente de dos ruedas, una alineada con la otra.
2. El mecanismo de dirección, que permitía girar la rueda delantera. Este mecanismo se desarrolló para poder compensar los desequilibrios laterales que surgían durante la zancada.



Fig.2. Pintura de una Draisiana. Imagen extraída de [historiainventos.blogspot.com](http://historiainventos.blogspot.com)

En 1861, el carrocerero parisino Pierre Michaux decidió instalar unos pedales acoplados a la rueda delantera de una Draisiana. Es el primer modelo con pedales que se comercializó. Sin embargo, dado la complejidad de manejo por su elevado peso y la incomodidad que presentaba dado que las ruedas eran metálicas o de madera, por lo que no amortiguaban los impactos del terreno, no tuvo un éxito excesivo.



Fig.3. Esquema del modelo ideado por Pierre Michaux. Imagen extraída de [bikester.es](http://bikester.es)

James Starley (1830-1881), inventor británico decidió intentar mejorar el modelo de Pierre Michaux. En 1870 creó el modelo conocido como bicicleta de rueda alta. Las ventajas que presentaba este diseño respecto a modelos anteriores representaron un gran avance en el mundo de la bicicleta. Starley aumentó notablemente el diámetro de la rueda motriz, permitiendo así alcanzar mayores velocidades. Introdujo los radios de alambre tensados similares a los presentes en las bicicletas modernas, en sustitución de los radios de madera aligerando de esta manera el peso total. Este modelo fue muy popular en la alta sociedad británica y estadounidense ya que se consideró como un vehículo que otorgaba prestigio social. Sin embargo, al presentar el centro de masas (c.m.\*) demasiado elevado y adelantado causaba que el ciclista saliese despedido hacia adelante con mucha facilidad, lo cual provocaba lesiones fuertes debido a su gran altura.

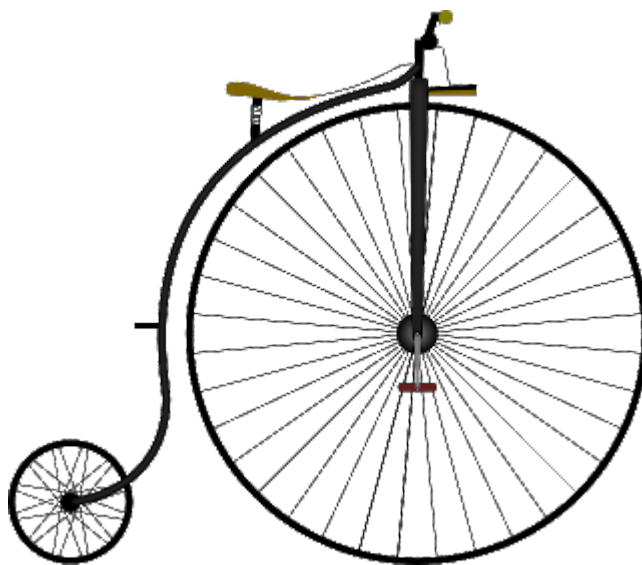


Fig.4. Esquema de una bicicleta de rueda alta. Imagen extraída de *bikester.es*

Quince años más tarde, en 1885 John Kemp Starley (1854-1901), sobrino de James Starley creó la bicicleta moderna. Desde el momento de la creación del modelo de John Kemp Starley únicamente ha habido mejoras de eficiencia y diseño, pero la bicicleta ya no cambió su aspecto ni su forma de funcionar. El primer modelo que creó Kemp fue bautizado por su autor con el nombre de *La Rover*, aunque tradicionalmente se conoce como la bicicleta segura. Las grandes aportaciones de este modelo eran:

- Volver a las ruedas de tamaños similares ya que al introducir la tracción por cadena no se requería una rueda motriz de gran tamaño para alcanzar grandes velocidades.
- Centro de gravedad más bajo y entre las dos ruedas (al igual de la Draisiana) por lo

que se convertía en un modelo mucho más seguro y manejable.

- Tracción en la rueda trasera que permitía mayor maniobrabilidad de la rueda delantera.

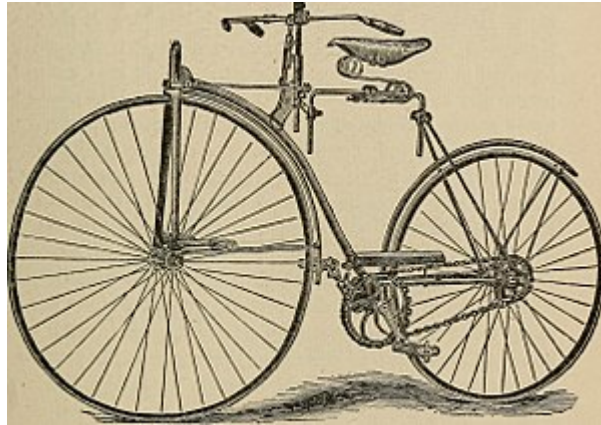


Fig.5. Primer modelo de la bicicleta Rover. Imagen extraída de *cyclecity.com*

La bicicleta segura fue el modelo que realmente triunfó a nivel social, y de la mano de este diseño aparecieron las primeras bicicletas eléctricas. El auténtico problema con el que se encontraban las bicicletas eléctricas ha perdurado hasta hoy, y ha sido el tema de las baterías, ya que si se quería una buena autonomía estas eran demasiado grandes y pesadas. La primera bici con motor eléctrico patentada data del año 1895, diseñada por el americano Ogden Bolton. Durante esta década hubo múltiples patentes, pero la bicicleta eléctrica no cogió importancia hasta mediados del siglo XX, ya que los automóviles y las motocicletas pasaron por delante de las bicicletas como medio de transporte dado que por aquel entonces el petróleo no era caro. Durante la segunda guerra mundial los modelos eléctricos de bicicleta presentaron un aumento en la producción debido a que los grandes vehículos motorizados se emplearon básicamente para la guerra, pero no tuvo gran relevancia. Durante la década de los setenta, gracias a la crisis energética del petróleo y el inicio de los movimientos ecologistas se comenzó a ver en la bicicleta eléctrica una opción limpia a la dependencia del petróleo. Sin embargo, no fue hasta finales de los años 90 donde empezaron a coger importancia de verdad los modelos eléctricos, hasta su despunte en 2005 que ha perdurado hasta hoy en día, motivado en gran parte por los activismos ecológicos.

### 3.2. Tipos de bicicleta eléctrica

Este apartado es indispensable de cara al estudio que se va a realizar para entender cómo



funcionan las bicicletas eléctricas y ver las opciones que proporciona el mercado hoy en día.

Las bicicletas eléctricas se pueden clasificar en distintos tipos, según la localización del motor y según el tipo de asistencia del motor<sup>1</sup>. En lo que se refiere a la localización del motor, este puede actuar únicamente en dos lugares:

1. En el **buje de la rueda** tanto delantera como trasera.
2. En el **eje del *pedalier***.

Los motores ubicados en el buje de la rueda se conocen como motores HUB. Es el tipo de motor más frecuente debido a su sencillez de instalación y reparación. Si se sitúa en el eje delantero, la principal ventaja que presenta es que es muy sencillo de montar dado que la rueda delantera es la que menos complejidad presenta, y se distribuyen mejor los pesos. Sin embargo, la principal desventaja es que se pierde agarre, característica muy relevante especialmente en el ciclismo de montaña, ya que hay cambios de desnivel muy abruptos con terrenos que con frecuencia no están bien pavimentados y los cambios de velocidades suelen ser muy bruscos. Si está situado en la rueda trasera, la bicicleta presenta un mejor agarre. Sin embargo, dado que en la rueda trasera se encuentran las marchas, esto provoca mayor complejidad a la hora de tener que reparar el motor (si se requiere), montarlo o si se precisa sacar la rueda para arreglar un pinchazo (es la situación más frecuente de las mencionadas anteriormente, y la principal reparación en bicicletas). Los motores HUB son muy prácticos en las bicicletas cuya finalidad es la de ser utilizada como medio de transporte en los centros urbanos, ya que no es necesario maximizar la relación de agarre ni la de potencia, por lo que no se requiere un motor de gran complejidad y los motores HUB cumplen a la perfección con estas prestaciones.

Los motores situados en el eje del *pedalier* reciben el nombre de motor central. Este tipo de motor presenta mejores prestaciones que los motores HUB principalmente por dos motivos. El primero, dado que pueden presentar mayor tamaño, los motores centrales suelen estar mejor diseñados. El segundo motivo es que los motores centrales se benefician de la relación de marchas, ya que la transmisión de potencia actúa en la cadena a través de un plato de tracción, con lo que se consigue mayor eficiencia y mayor potencia transmitida a la rueda. Este tipo de motor es el que presentan las MTB, ya que requieren más potencia y un mayor uso de la relación de marchas. La principal desventaja de los motores centrales es su complejidad, por lo que encarecen el proceso de reparación en caso de ser necesario.

Otra forma de clasificar las bicicletas eléctricas viene dada por el tipo de asistencia que

---

<sup>1</sup> Lo que se clasifica son los tipos de bicicleta eléctrica, por lo que el funcionamiento mecánico de los motores no se contempla en este trabajo.



proporciona el motor. Las formas de transferir la potencia eléctrica son dos, pero debido a la legislación actual (se tratará con mayor detalle en el apartado siguiente) las casas de bicicletas eléctricas básicamente proporcionan la segunda opción:

1. Con acelerador.
2. Pedaleo asistido, también conocido como ***pedelec***.

Según la legislación vigente en la Unión Europea, las bicicletas con acelerador se consideran ciclomotores eléctricos, por lo que se requiere una licencia de conducción para poder utilizarlas. Al presentar un acelerador, el motor puede funcionar sin necesidad de que la persona pedalee.

El segundo tipo presenta un sensor que detecta el movimiento de los pedales, momento en el cual a través de un controlador se activa el motor para asistir al ciclista, por lo que para que el motor funcione se requiere pedalear. Actualmente existen dos tipos de sensores, el sensor de torque o de par, el cual mide la fuerza de pedaleo y en función de esta fuerza regula la potencia proporcionada por el motor a través del controlador, y el sensor de movimiento, el cual detecta la actividad de los pedales y activa la asistencia de forma progresiva. La principal diferencia entre los dos sensores es la velocidad de respuesta. El sensor de torque tiene una respuesta casi inmediata, por lo que la asistencia se activa en el primer instante de pedaleo. El sensor de movimiento requiere entre  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{3}{4}$  de vuelta para que el motor entre en acción.

Localización Asistencia	Buje de la rueda		Eje <i>pedalier</i>
	Delantera	Trasera	
Acelerador	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Fácil de instalar</li> <li>-Fácil extracción para reparaciones</li> <li>-Buena distribución de peso</li> <li>-Pérdida de agarre</li> <li>-Requiere licencia de conducción</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Fácil de instalar</li> <li>-Mayor complejidad en reparaciones</li> <li>-Mayor agarre</li> <li>-Requiere licencia de conducción</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Mayor calidad de motor</li> <li>-Aprovecha la relación de marchas</li> <li>-Mejor eficiencia</li> <li>- Requiere licencia de conducción</li> </ul>

<i>Pedelec</i>	-Fácil de instalar -Fácil extracción para reparaciones -Buena distribución de peso -Pérdida de agarre -No requiere licencia de conducción	-Fácil de instalar -Mayor complejidad en reparaciones -Mayor agarre -No requiere licencia de conducción -Modelo más utilizado	-Mayor calidad de motor -Aprovecha la relación de marchas -Mejor eficiencia - Requiere licencia de conducción -Modelo más frecuente en las MTB
----------------	---	---	--

Tabla 1. Características en función del tipo de bicicleta eléctrica.

### 3.3. Legislación

Dado el gran auge de las bicicletas eléctricas en el siglo XXI, la gran variedad de tipos y de características que pueden presentar las bicicletas con asistencia de un motor eléctrico, tanto la Unión Europea como el Estado español actualizó su normativa vigente para determinar qué se consideraba como bicicleta eléctrica. Las características que debe presentar una bicicleta para ser homologada como bicicleta eléctrica son las siguientes<sup>2</sup>:

- El motor incorporado no debe superar los 25 kilómetros/hora (*km/h*), por lo que debe presentar un sistema para detener la asistencia en caso de superarse dicha velocidad.
- El motor únicamente puede proporcionar asistencia mientras exista pedaleo, por lo que debe detenerse si el ciclista deja de pedalear.
- La bicicleta, en ausencia del ciclista no podrá superar los 40 kilogramos (*kg*) de peso.
- El motor no debe superar una potencia continua de 250 Vatios (*W*), aunque puede presentar picos de hasta 350 *W*.
- Al igual que las bicicletas normales, la bicicleta eléctrica deberá disponer de frenos tanto delanteros como traseros, así como tener incorporado un timbre, luces de

<sup>2</sup> Características recogidas en el *Real decreto 2822/1998, Artículo 22 punto 3* [1] y en el *Artículo 2 punto 1 del REGLAMENTO No 168/2013*. [2]

posición y catadióptricos.

Cualquier bicicleta que cuente con la asistencia de un motor eléctrico y que presente características diferentes a las presentadas es considerada un ciclomotor eléctrico, por lo que deberá cumplir la normativa vigente acerca de los ciclomotores.

## 4. Análisis dinámico

Dado que el objetivo del proyecto es realizar el estudio del funcionamiento de una bicicleta para poder instalar un motor eléctrico que pueda ayudar al ciclista a desplazarse con menor esfuerzo, y así poder arrastrar el carro con el niño de la forma más fácil posible, lo primero que se debe llevar a cabo es el análisis de las fuerzas que actúan en la bicicleta. Dichas fuerzas son las que debe vencer el ciclista para lograr que la bicicleta avance. Estas fuerzas son dependientes de la velocidad de desplazamiento ( $v$ ) del sistema y de la pendiente ( $\beta$ ) en la que se encuentre el sistema.

Como se ha mencionado en el apartado 2.3, se han realizado dos análisis dinámicos diferentes, el primero teniendo como sistema únicamente al ciclista y a la bici, y el segundo teniendo como sistema al ciclista, a la bici, al niño y al carro. El fin de realizar ambos estudios por separado es el de poder evaluar cómo la presencia del carro influye en la fuerza que debe realizar el ciclista en determinadas condiciones, para poder así concretar y definir el tipo de ayuda que se pretende recibir gracias a la instalación del motor. Las incógnitas presentes en el sistema dinámico completo son siete.

Abreviación	Significado
$N_1$	Fuerza normal entre la rueda delantera de la bicicleta y el suelo
$N_2$	Fuerza normal entre la rueda trasera de la bicicleta y el suelo
$N_3$	Fuerza normal entre la rueda del carro y el suelo
$F_{\tan 1}$	Fuerza tangencial entre el suelo y la rueda delantera
$F_{\tan 2}$	Fuerza tangencial entre el suelo y la rueda trasera
$F_{\tan 3}$	Fuerza tangencial entre el suelo y la rueda del carro
$\Gamma$	Par recibido por la rueda trasera gracias al pedaleo

Tabla 2. Incógnitas del sistema dinámico completo.

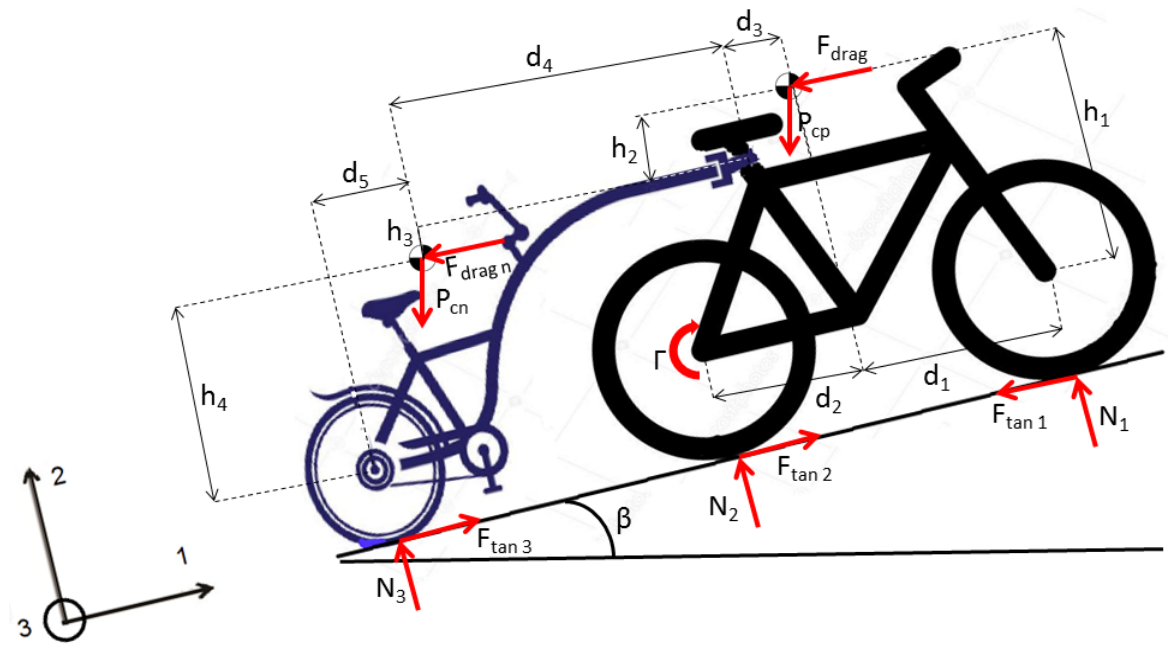


Fig.6. Sistema dinámico completo. Los c.m. y las fuerzas de *drag* son del conjunto bici-ciclista y carro-niño.

Abreviación	Significado
$h_1$	Distancia en el eje 1 entre los ejes de las ruedas y el c.m. del cuadro de la bicicleta y el ciclista <sup>3</sup> .
$h_2$	Distancia en el eje 1 entre el enlace del carrito con la bicicleta y el c.m. del cuadro de la bicicleta y el ciclista.
$h_3$	Distancia en el eje 1 entre el enlace del carrito con la bicicleta y el c.m. del cuadro del carrito y el niño.
$h_4$	Distancia en el eje 1 entre el eje de la rueda del carrito y el c.m. del cuadro del carrito y el niño.
$d_1$	Distancia en el eje 2 entre el eje de la rueda delantera y el c.m. del cuadro y el ciclista.

<sup>3</sup> Ver anexo 1.

$d_2$	Distancia en el eje 2 entre el eje de la rueda trasera y el c.m. del cuadro y el ciclista.
$d_3$	Distancia en el eje 2 entre el enlace del carrito con la bicicleta y el c.m. del cuadro de la bicicleta y el ciclista.
$d_4$	Distancia en el eje 2 entre el enlace del carrito con la bicicleta y el c.m. del cuadro del carrito y el niño.
$d_5$	Distancia en el eje 2 entre el eje de la rueda del carrito y el c.m. del cuadro del carrito y el niño.
$m_{cp}^4$	Masa del ciclista y el cuadro de la bicicleta.
$m_{cn}^5$	Masa del niño y el cuadro del carrito.
$\beta$	Pendiente en grados entre el suelo y la horizontal.
$F_{drag}$	Fuerza aerodinámica de <i>drag</i> del ciclista y el cuadro de la bicicleta. <sup>6</sup>
$F_{dragn}$	Fuerza aerodinámica de <i>drag</i> del niño y el cuadro del carrito. <sup>7</sup>

Tabla 3. Parámetros del sistema dinámico completo.

## 4.1. Hipótesis y simplificaciones

Para la elaboración del estudio se han realizado ciertas hipótesis y simplificaciones que se detallan a continuación:

- **Movimiento rectilíneo uniforme.** Dado que se trata del estudio de las fuerzas que

---

<sup>4, 5</sup>,  $P_{cp}$  y  $P_{cn}$  son el peso del conjunto chasis de la bicicleta y el ciclista y del conjunto chasis del carrito y niño respectivamente.

<sup>6, 7</sup> Formuladas en el apartado 4.1.

recibe la bicicleta para poder calcular la fuerza a realizar por parte del ciclista, y el hecho de que dicho ciclista va a tener que arrastrar un carro enganchado a su bicicleta con un niño montado en él, esto provoca que no se pretendan alcanzar grandes velocidades ni cambios bruscos de velocidad. A su vez, cuando uno circula en bicicleta pretende alcanzar una velocidad constante a la cual mantenerse durante el trayecto (siempre y cuando no haya cambios de pendiente u obstáculos). Por estos motivos se ha creído oportuno realizar el estudio en estas circunstancias para simplificar los cálculos, ya que además son las circunstancias que se dan mayoritariamente en un trayecto en bicicleta en estas condiciones. Dado que el movimiento es rectilíneo, el estudio se ha realizado de forma bidimensional, por lo que las fuerzas perpendiculares al plano del movimiento no se han tenido en cuenta. Cabe añadir que se ha considerado la bicicleta totalmente simétrica respecto al plano vertical-lateral.

- **Inercia de las ruedas.** Un hecho típico en el estudio de la dinámica de los vehículos es el de menospreciar la inercia de las ruedas, ya que por lo general la masa de las ruedas es menospreciable en comparación con la del resto del vehículo. En el caso de los coches, las cuatro ruedas representan aproximadamente un 5% del peso total del vehículo, por lo que cada rueda únicamente representa un 1,25% del peso total. Sin embargo, en una bicicleta la masa de las ruedas no se puede menospreciar ya que la masa de las ruedas representan aproximadamente un 35% del peso total. Por este motivo se ha considerado la masa de las ruedas y su inercia en el desarrollo del análisis dinámico. Sin embargo, el cálculo de la inercia de las ruedas se ha realizado de forma aproximada, considerando que toda la masa estaba distribuida en la periferia de la rueda, ya que el peso que aportan los radios es mínimo en comparación con la llanta, la cámara y el neumático. Teniendo en cuenta esta hipótesis, se plantearon dos situaciones diferentes para calcular la inercia:
  1. Toda la masa concentrada en la periferia, por lo tanto un anillo circular con radio igual al radio de la rueda de  $R=33,02 \text{ cm}$  y  $m=2,2 \text{ kg}$  en lo que respecta a la bicicleta, y  $R=25,4 \text{ cm}$  y  $m=3,6^8 \text{ kg}$  en lo que respecta al carro.
  2. Una corona cilíndrica con la masa uniformemente repartida, comprendida entre la llanta y la periferia de la rueda, de radios  $R_{\text{menor}}=27,94 \text{ cm}$  y  $R_{\text{mayor}}=33,02 \text{ cm}$  en la bicicleta, y de radios  $R_{\text{menor}}=15,24 \text{ cm}$  y  $R_{\text{mayor}}=25,4 \text{ cm}$  en el carro.

---

<sup>8</sup> La masa de una rueda del carro es  $1,8 \text{ kg}$ , sin embargo, el carro presenta dos ruedas. Dado que el estudio se ha realizado en dos dimensiones y por la posición de las ruedas, es válido reducir el sistema a una única rueda con el doble de masa.

El criterio de selección a seguir ha sido el más perjudicial, es decir, que se ha seleccionado la inercia más grande para compensar otras simplificaciones que causan que el resultado final sea menor a la fuerza real, seleccionándose de esta manera el anillo circular.

Para la rueda trasera se ha seguido el mismo criterio. Sin embargo, se ha tenido en cuenta la inercia que aportaban los piñones, considerándose estos como un cilindro de  $m=0,5 \text{ kg}$ . Se ha cogido como radio el piñón más grande, con un radio de  $R_{\text{piñón}}=7 \text{ cm}$ . Por lo tanto la inercia de la rueda trasera es la misma que la rueda delantera más la de un cilindro que rota alrededor de su eje.

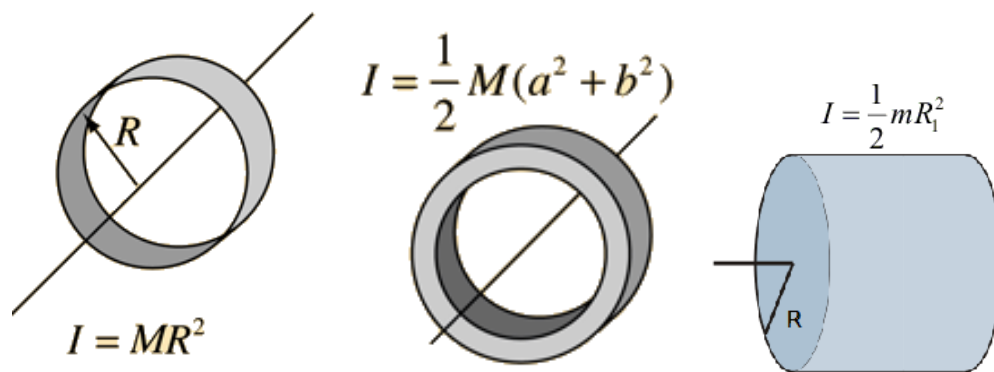


Fig.7. Momentos de inercia de un anillo circular, de una corona cilíndrica, donde  $a$  es el radio menor de la corona y  $b$  el radio mayor, y de un cilindro.

Los resultados obtenidos para los momentos de inercia de las ruedas son<sup>9</sup>:

- Rueda delantera de la bici:  $I_1=0,2396 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- Rueda trasera de la bici:  $I_2=0,2408 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- Rueda del carrito:  $I_3= 0,1161 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

- **Contacto puntual entre las ruedas y el suelo.** La rueda de una bicicleta no es un sólido rígido. Por ello, al estar en contacto con el suelo, la rueda experimenta una deformación que causa un contacto multipuntual entre rueda y suelo (ver Figura 8). Dicho contacto multipuntual genera un momento que se opone al movimiento

<sup>9</sup> Cálculos presentes en los archivos MATLAB adjuntos, *Dinamicabici.m* y *Dinamicabicicarro.m*.



conocido como *momento de rodadura*. Sin embargo, para el estudio de las fuerzas de la bicicleta se ha considerado la rueda como un sólido rígido que no se deforma, en el que únicamente hay un contacto puntual entre la rueda y el suelo y no se da dicho momento.

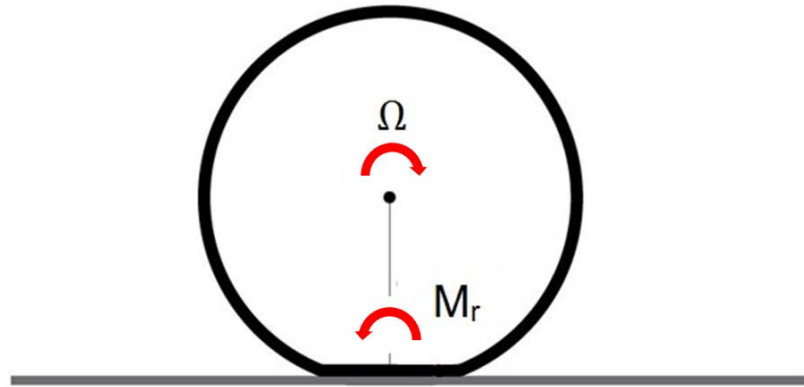


Fig.8. Momento de rodadura provocado por el contacto multipuntual debido a la deformación de la rueda, donde  $\Omega$  es la velocidad angular de la rueda.

- **Fuerzas aerodinámicas.** Durante un recorrido en bicicleta un ciclista se ve afectado por las fuerzas aerodinámicas de *lift* (sustentación) y de *drag* (resistencia al avance). Dado que un ciclista no puede alcanzar grandes velocidades, la fuerza de *lift* es muy pequeña, ya que el producto del coeficiente de *lift* por el área frontal da del orden de 0,012<sup>10</sup> y por ello se ha considerado nula. No se puede decir lo mismo de la fuerza de *drag*. La fuerza de *drag* es una de las fuerzas con mayor influencia en el ciclismo y por ello se ha tenido en cuenta en el presente estudio. Únicamente se ha considerado nula en lo que respecta a las ruedas, ya que su área frontal es muy pequeña en comparación a la del ciclista junto con el cuadro. Otra simplificación a destacar es el punto de aplicación de las fuerzas aerodinámicas. Las fuerzas aerodinámicas se aplican en el centro de presiones, el cual está muy próximo al centro de gravedad. Por este motivo se considera correcto aplicarlas en el centro de gravedad, y así es como se ha hecho<sup>11</sup>. La fuerza de *drag* es independiente de la pendiente, ya que depende de la velocidad del viento, y se ha cogido como velocidad del viento la propia velocidad del ciclista. Dicha fuerza se puede calcular

<sup>10</sup> Información extraída de la página 76 del libro *Motorcycle Dynamics*, del autor Vittore Cossalter.[3]

<sup>11</sup> *Idem*, página 74. [3]

por medio de la siguiente ecuación:

$$F_{drag} = \frac{1}{2} \cdot C_d \cdot A \cdot \rho_{aire^{12}} \cdot v^2$$

Donde:

- $C_{d^{13}} = 4.45 \cdot m_{ciclista}^{-0.45}$
- $A^{14} = 0.0293 \cdot h_{ciclista}^{0.725} \cdot m_{ciclista}^{0.425} + 0.0604$
- **Centro de gravedad estático.** Dado que durante el pedaleo el ciclista cambia la posición de las piernas, el centro de gravedad total presenta una ligera variación en su localización. Sin embargo, como esta variación es pequeña, se ha calculado el centro de gravedad en una posición concreta del ciclista, siendo esta la posición más frecuente durante un trayecto en bicicleta ya que es la posición que se adopta cuando se deja de pedalear, manteniendo un pedal en la posición más baja, mientras que el otro se encuentra en la posición más alta, y se ha considerado que el centro de gravedad se mantiene en el mismo lugar durante el trayecto y por tanto durante el análisis dinámico.
- **Fuerza de pedaleo constante.** Los cálculos se han realizado como si la fuerza de pedaleo y por tanto el par transmitido a la rueda trasera fuesen constantes, a pesar de que en la realidad no sucede así, ya que la fuerza que se ejerce sobre el pedal depende de la posición en que este se encuentra. Sin embargo, como el par que aporta un motor sí es continuo, se ha preferido realizar de esta forma el cálculo para mayor simplificación a la hora de analizar el motor que se prefiere.
- **No deslizamiento entre rueda y suelo.** Se ha considerado que en ningún caso se produce deslizamiento entre el punto de contacto entre la rueda y el suelo. Con esto la velocidad de avance y la aceleración de la bicicleta están relacionadas de forma

---

<sup>12</sup> Se ha considerado la densidad del aire a la presión atmosférica normal y 20 °C

<sup>13, 14</sup> Ecuaciones obtenidas del artículo *Aerodynamic drag in cycling: Methods of assessment* [4]. Para las fuerzas aerodinámicas del carrito y el niño se han empleado las mismas ecuaciones.

directa con la velocidad y la aceleración angular de la rueda.

$$\Omega_{rueda} = \frac{v_{avance}}{R}$$

$$\ddot{\theta}_{rueda} = \frac{a_{bici}}{R}$$

El análisis cinemático se ha realizado teniendo en cuenta las anteriores hipótesis y simplificaciones, por lo que la velocidad tanto del ciclista como de cualquier punto del cuadro coincide con la velocidad de avance, y la velocidad de cualquier punto de las ruedas se puede calcular por medio del producto de la velocidad angular de la rueda por la distancia al centro instantáneo de rotación (CIR\*), siendo este el punto de contacto con el suelo.

## 4.2. Bicicleta y ciclista

Para realizar este apartado, si se coge únicamente el sistema completo de la bici y el ciclista se obtienen cinco incógnitas (los teoremas vectoriales únicamente contemplan las fuerzas y momentos externos) que se pueden observar en la Figura 6 fijándose únicamente en la bicicleta, siendo estas las dos tangenciales entre la rueda delantera y trasera con el suelo, las dos normales entre el contacto de cada rueda con el suelo y el par necesario en la rueda trasera. Los teoremas vectoriales aportan tres ecuaciones por sistema, por lo que si se realiza de esta forma el estudio está sobredimensionado y no se puede resolver. Por ello se ha dividido el sistema en tres:

1. Conjunto ciclista y cuadro.
2. Rueda delantera
3. Rueda trasera

De esta manera aparecen cuatro nuevas incógnitas en forma de fuerzas de enlace, que son las fuerzas de enlace 1-4 (ver Figura 9), pero se obtienen nueve ecuaciones de aplicar los teoremas vectoriales a cada sistema, por lo que finalmente queda un sistema de nueve ecuaciones con nueve incógnitas que sí se puede resolver.

### 4.2.1. Conjunto ciclista y cuadro

El sistema ciclista y cuadro presenta seis fuerzas, de las cuales dos son formulables siendo función del estado y de parámetros del sistema, mientras que cuatro son incógnitas.

Las nuevas incógnitas que aparecen son:

- $F_{e1}$ : Fuerza de enlace horizontal entre el cuadro y la rueda delantera.
- $F_{e2}$ : Fuerza de enlace horizontal entre el cuadro y la rueda trasera.
- $F_{e3}$ : Fuerza de enlace vertical entre el cuadro y la rueda trasera.
- $F_{e4}$ : Fuerza de enlace vertical entre el cuadro y la rueda delantera.

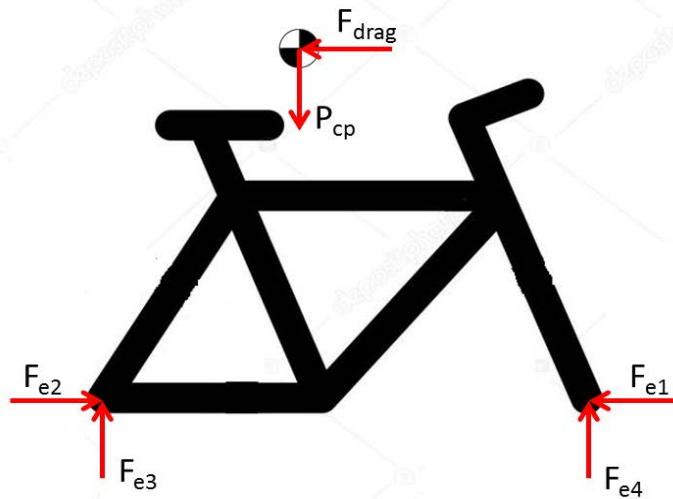


Fig.9. Fuerzas presentes en el sistema ciclista y chasis para la configuración  $\beta=0$ .

Aplicando el TCM se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_{e2} - F_{drag} - F_{e1} - m_{cp} \cdot g \cdot \sin \beta \\ F_{e3} + F_{e4} - m_{cp} \cdot g \cdot \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{cp} \cdot a_{(c.m. \text{ total})1} \\ m_{cp} \cdot a_{(c.m. \text{ total})2} \end{bmatrix}$$

$a_{(Cm \text{ total})2}$  es cero ya que no hay movimiento en dirección vertical (eje 2<sup>15</sup>).

Aplicando el TMC en el c.m. total, en el cual únicamente aparecen momentos en el tercer eje se obtiene:

$$F_{e2} \cdot h + F_{e4} \cdot d_1 - F_{e1} \cdot h - F_{e3} \cdot d_2 = \overline{G\dot{K}_{cp}}$$

<sup>15</sup> Dado que en ningún sistema se tiene movimiento en el eje de referencia 2, de ahora en adelante se pondrá directamente 0

$\dot{\overline{GK_{cp}}}$  es cero ya que el cuadro no presenta rotación.

#### 4.2.2. Rueda delantera

Las fuerzas y momentos presentes se observan en la figura siguiente:

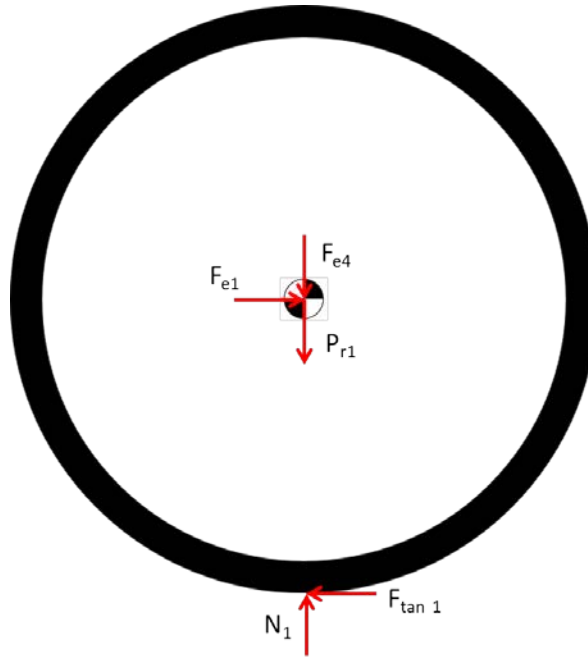


Fig.10. Fuerzas y momentos presentes en la rueda delantera

La única nueva fuerza que aparece es:

- $P_{r1}$ : Peso de la rueda delantera.

La masa de la rueda delantera es conocida<sup>16</sup>, por lo que esta nueva fuerza también es conocida y no una incógnita.

Aplicando nuevamente el TCM se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} F_{e1} - F_{tan\ 1} - m_{r1} \cdot g \cdot \sin \beta \\ N_1 - F_{e4} - m_{r1} \cdot g \cdot \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{r1} \cdot a_{(c.m.\ r1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando el TMC en el c.m.<sub>r1</sub> se obtiene:

<sup>16</sup> Ver apartado 4.1

$$-F_{\tan 1} \cdot R = \overline{G\dot{K}_{r1}}$$

Donde  $\overline{G\dot{K}_{r1}}$  es la derivada temporal del momento cinético  $\overline{GK_{r1}}$  de la rueda en su centro de gravedad.

$$\overline{GK_{r1}} = I_{r1} \cdot \dot{\theta}$$

$I_{r1}$  es el momento de inercia de la rueda desde su eje y  $\dot{\theta}$  es la velocidad angular de la rueda desde el suelo, por lo que derivándolo respecto al tiempo se obtiene:

$$\overline{G\dot{K}_{r1}} = I_{r1} \cdot \ddot{\theta}$$

#### 4.2.3. Rueda trasera

El análisis del sistema rueda trasera únicamente aporta como nueva fuerza su propio peso, el cual, al igual que en la rueda delantera, es una fuerza conocida del sistema.

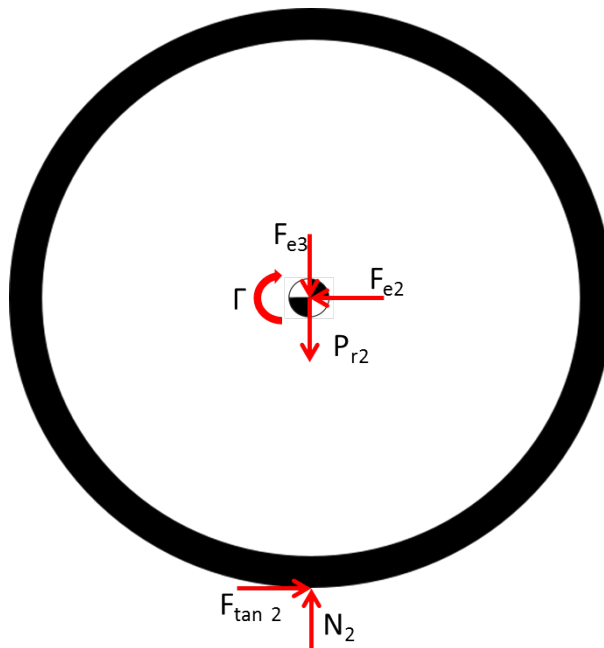


Fig.11. Fuerzas y momentos presentes en la rueda trasera

Aplicando el TCM se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_{\tan 2} - F_{e2} - m_{r2} \cdot g \cdot \sin \beta \\ N_2 - F_{e3} - m_{r2} \cdot g \cdot \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{r2} \cdot a_{(c.m. \ r2)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando el TMC en el c.m. se obtiene la siguiente ecuación:

$$F_{\tan 2} \cdot R - \Gamma = \overline{G\dot{K}_{r2}}$$

$$\overline{G\dot{K}_{r2}} = I_{r2} \cdot \ddot{\theta}$$

### 4.3. Bicicleta y carro

Este análisis se ha resuelto de forma similar al anterior. El nuevo sistema está comprendido por la bicicleta, el ciclista, el carro que va adherido a la bicicleta y el niño que va montado en el carro. Para realizar el análisis, el sistema se ha dividido en cinco. La bicicleta se ha dividido de la misma forma que el apartado anterior, pero además también se ha separado el estudio del cuadro del carro junto con el niño, y se ha separado la rueda del carro.

#### 4.3.1. Conjunto ciclista y cuadro de la bicicleta

Esta parte del estudio dinámico es prácticamente igual que el del apartado anterior. Únicamente aparecen dos nuevas fuerzas, que son las fuerzas de enlace entre el sillín de la bicicleta y el carro:

- $F_{e5}$ : Fuerza de enlace horizontal entre el sillín de la bicicleta y el carro.
- $F_{e6}$ : Fuerza de enlace vertical entre el sillín de la bicicleta y el carro.

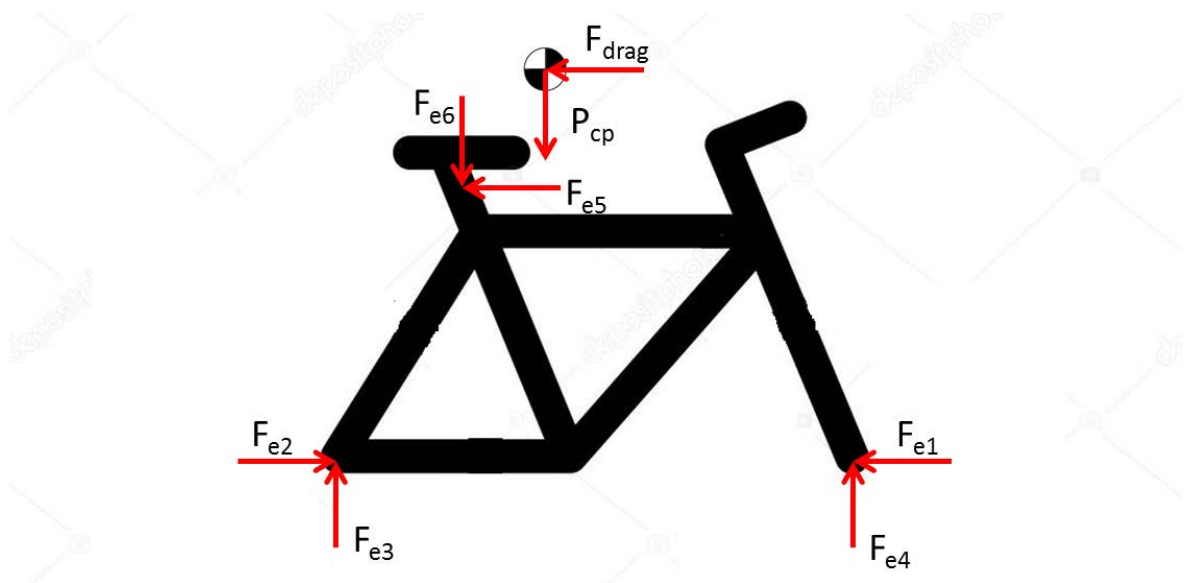


Fig.12. Fuerzas y momentos presentes en el conjunto cuadro más ciclista

Aplicando el TCM se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_{e2} - F_{drag} - F_{e1} - F_{e5} - m_{cp} \cdot g \cdot \sin \beta \\ F_{e3} + F_{e4} - F_{e6} - m_{cp} \cdot g \cdot \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{cp} \cdot a_{(c.m. total)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Del TMC aplicado en el c.m.<sub>total</sub> se obtiene:

$$F_{e2} \cdot h_1 + F_{e4} \cdot d_1 - F_{e1} \cdot h_1 - F_{e3} \cdot d_2 + F_{e6} \cdot d_3 - F_{e5} \cdot h_2 = \overline{G\dot{K}_{cp}}$$

$$\overline{G\dot{K}_{cp}} = 0$$

#### 4.3.2. Ruedas delantera y trasera de la bici

En lo que a las ruedas respecta, no existe variación alguna entre el análisis del apartado 5.2.2 y 5.2.3, por ello únicamente se añadirán las ecuaciones.

Ecuaciones rueda delantera:

TCM:

$$\begin{bmatrix} F_{e1} - F_{tan1} - m_{r1} \cdot g \cdot \sin \beta \\ N_1 - F_{e4} - m_{r1} \cdot g \cdot \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{r1} \cdot a_{(c.m. r1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

TMC en el c.m.<sub>r1</sub> de la rueda delantera:

$$-F_{tan1} \cdot R = \overline{G\dot{K}_{r1}}$$

$$\overline{G\dot{K}_{r1}} = I_{r1} \cdot \ddot{\theta}$$

Ecuaciones rueda trasera:

TCM:

$$\begin{bmatrix} F_{tan2} - F_{e2} - m_{r2} \cdot g \cdot \sin \beta \\ N_2 - F_{e3} - m_{r2} \cdot g \cdot \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{r2} \cdot a_{(c.m. r2)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

TMC en el c.m.<sub>r2</sub> de la rueda trasera:

$$F_{tan2} \cdot R - \Gamma = \overline{G\dot{K}_{r2}}$$

$$\overline{G\dot{K}_{r2}} = I_{r2} \cdot \ddot{\theta}$$



### 4.3.3. Conjunto cuadro del carro y niño

El análisis del sistema cuadro del carro y niño introduce dos nuevas incógnitas:

- $F_{e7}$ : Fuerza de enlace horizontal entre el cuadro del carro y la rueda.
- $F_{e8}$ : Fuerza de enlace vertical entre el cuadro del carro y la rueda.

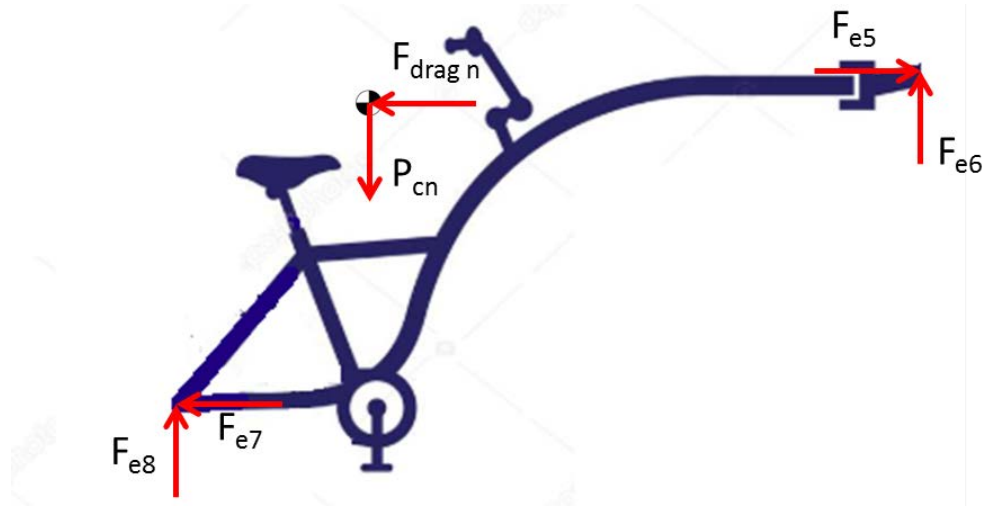


Fig.13. Fuerzas y momentos presentes en el conjunto cuadro del carro más niño

Aplicando el TCM se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_{e5} - F_{e7} - F_{drag\ n} - m_{cn} \cdot g \cdot \sin \beta \\ F_{e6} + F_{e8} - m_{cp} \cdot g \cdot \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{cn} \cdot a_{(c.m. \ cn)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando el TMC en el c.m.  $_{cn}$  se obtiene la siguiente ecuación:

$$F_{e6} \cdot d_4 - F_{e5} \cdot h_3 - F_{e8} \cdot d_5 - F_{e7} \cdot h_4 = \overline{GK_{cp\ cn}}$$

Donde  $\overline{GK_{cp\ cn}} = 0$  dado que el carro no gira.

### 4.3.4. Rueda del carrito

El carrito presenta dos ruedas para tener una estabilidad mayor, sin embargo, dada la simplificación de realizar el estudio en dos dimensiones, y la consideración de que es totalmente simétrico, únicamente se ha considerado como si tuviese una única rueda, pero

con el doble de masa que la que realmente tiene. La única fuerza nueva que aparece es el peso de la rueda, el cual es conocido.

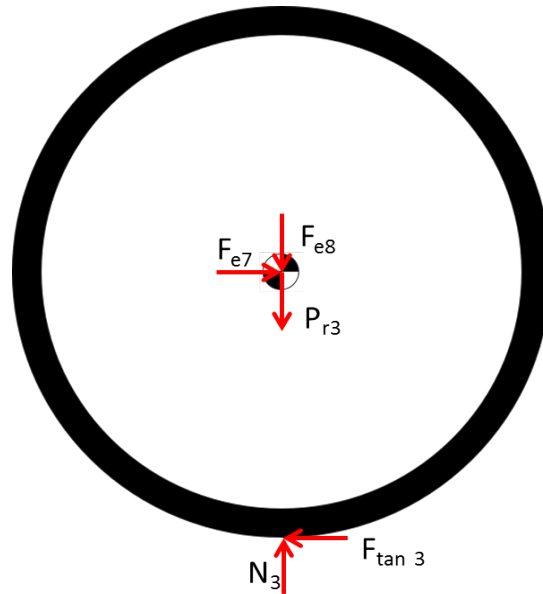


Fig.14. Fuerzas y momentos presentes en la rueda del carrito

De aplicar el TCM se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_{e7} - F_{\tan 3} - m_{r3} \cdot g \cdot \sin \beta \\ N_3 - F_{e8} - m_{r3} \cdot g \cdot \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{r3} \cdot a_{(c.m. \ r3)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando el TMC en el c.m.<sub>r3</sub> se obtiene la siguiente ecuación:

$$-F_{\tan 1} \cdot R_{r3} = \overline{G\dot{K}_{r3}}$$

$$\overline{G\dot{K}_{r3}} = I_{r3} \cdot \ddot{\theta}$$

#### 4.4. Relación par-fuerza y velocidad-cadencia\* del ciclista

En el apartado anterior se ha realizado el análisis dinámico para poder solucionar el sistema de ecuaciones derivado de aplicar los teoremas vectoriales y poder así encontrar el par requerido en la rueda trasera en función de la velocidad de avance y de la pendiente. Sin embargo, el interés de estudio es conocer la fuerza de pedaleo que debe ejercer el ciclista. Esta fuerza depende de la relación de marchas escogida, pero también se ha de tener en cuenta que en función de esta relación, la fuerza requerida será menor pero a su vez el

desarrollo métrico\* también será menor, por lo que se requerirá una mayor cadencia.

Para relacionar la fuerza a ejercer por el ciclista con el par necesario en la rueda trasera, se sigue el siguiente sistema de ecuaciones:

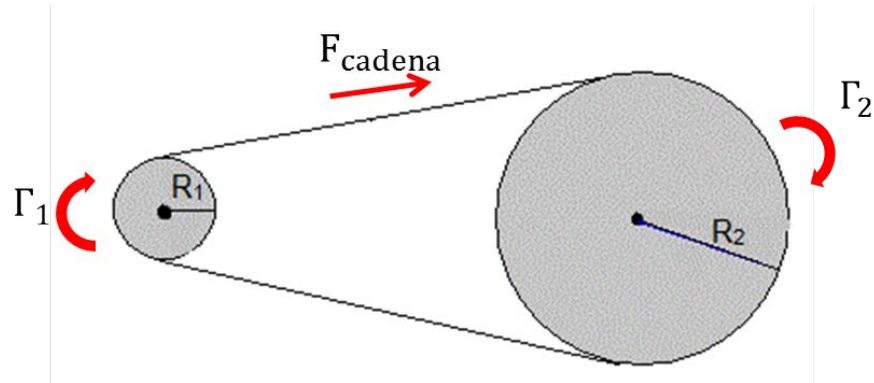


Fig.15. Fuerzas y momentos presentes en el sistema piñón-cadena-plato

$$F_{cadena} = \frac{\Gamma_1}{R_1}$$

$$\Gamma_2 = F_{cadena} \cdot R_2$$

$$F_{pedal} = \frac{\Gamma_2}{R_{pedal}}$$

$$F_{pedal} = \frac{\Gamma_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_{pedal}}$$

La relación de marchas escogida no únicamente afecta a la fuerza que debe ejercer el ciclista, sino que también afecta a la cadencia. La cadencia se puede calcular por medio del siguiente sistema:

$$\Omega_{rueda} = \frac{v_{avance}}{R}$$

$$\Omega_{rueda} = \Omega_{piñones}$$

$$\Omega_{platos} = \Omega_{piñones} \times \frac{D_{piñones}}{D_{platos}}$$

$$\Omega_{platos} = \Omega_{pedales}$$

## 5. Resultados y discusión

### 5.1. Parámetros del sistema y condiciones de movimiento

Una vez se tiene el conjunto de ecuaciones que permiten conocer las fuerzas que intervienen en el sistema, se han determinado los parámetros de dicho sistema y se ha impuesto un movimiento con las variables de velocidad y pendiente fijadas a partir del cual se ha podido extraer el valor de las fuerzas y momentos que actúan en la bicicleta para garantizar dichas condiciones. En concreto se han estudiado tres situaciones, una de pendiente nula, una de pendiente moderada y la tercera de pendiente considerable. Los valores de velocidad y pendiente se han basado en observaciones directas del autor del documento, y son:

- 1) Pendiente nula y velocidad constante de 25 Km/h
- 2) Pendiente del 3% <sup>17</sup> y velocidad constante de 10 Km/h
- 3) Pendiente del 12% y velocidad constante de 6 Km/h

Los parámetros del sistema y sus valores se pueden ver en la Tabla 4.

Abreviación	Significado	Valor
$h_1$	Distancia en el eje 1 entre los ejes de las ruedas y el c.m. del cuadro de la bicicleta y el ciclista <sup>18</sup> .	80,63 cm
$h_2$	Distancia en el eje 1 entre el enlace del carrito con la bicicleta y el c.m. del cuadro de la bicicleta y el ciclista.	11,63 cm
$h_3$	Distancia en el eje 1 entre el enlace del carrito con la bicicleta y el c.m. del cuadro del carrito y el niño.	11,75 cm

<sup>17</sup> Para pasar de porcentaje a grados se consigue mediante:  $\tan^{-1} \left[ \frac{\text{pendiente} (\%)}{100} \right]$

<sup>18</sup> Ver anexo 1.

$h_4$	Distancia en el eje 1 entre el eje de la rueda del carrito y el c.m. del cuadro del carrito y el niño.	63,25 cm		
$d_1$	Distancia en el eje 2 entre el eje de la rueda delantera y el c.m. del cuadro y el ciclista.	52,13 cm		
$d_2$	Distancia en el eje 2 entre el eje de la rueda trasera y el c.m. del cuadro y el ciclista.	56,87 cm		
$d_3$	Distancia en el eje 2 entre el enlace del carrito con la bicicleta y el c.m. del cuadro de la bicicleta y el ciclista.	26,87 cm		
$d_4$	Distancia en el eje 2 entre el enlace del carrito con la bicicleta y el c.m. del cuadro del carrito y el niño.	99,3 cm		
$d_5$	Distancia en el eje 2 entre el eje de la rueda del carrito y el c.m. del cuadro del carrito y el niño.	39,2 cm		
$m_{cp}^{19}$	Masa del ciclista y el cuadro de la bicicleta.	84,5 kg		
$m_{cn}^{20}$	Masa del niño y el cuadro del carrito.	47,4 kg		
$\beta$	Pendiente en grados entre el suelo y la horizontal.	0°	1,72°	6,84°
$F_{drag}$	Fuerza aerodinámica de <i>drag</i> del ciclista y el cuadro de la bicicleta. <sup>21</sup>	6,15 N	0,99 N	0,35 N
$F_{drag\ n}$	Fuerza aerodinámica de <i>drag</i> del niño y el cuadro del carrito. <sup>22</sup>	6,11 N	0,97 N	0,35 N

Tabla 4. Parámetros del sistema dinámico completo.

<sup>19, 20</sup>  $P_{cp}$  y  $P_{cn}$  son el peso del conjunto chasis de la bicicleta y el ciclista y del conjunto chasis del carrito y niño respectivamente.

<sup>21, 22</sup> Formuladas en el apartado 4.1.

## 5.2. Resultados del análisis dinámico

Para solucionar los diferentes sistemas de ecuaciones de cada análisis se ha empleado el programa matemático MATLAB. La resolución de dichos sistemas con los parámetros se puede ver en los archivos adjuntos *Dinamicabici.m* y *Dinamicabiciycarro.m*, los cuales son la resolución del análisis dinámico del sistema bicicleta y ciclista y del sistema bicicleta y carro respectivamente.

### 5.2.1. Sistema bicicleta y ciclista

Tal como se ha mencionado en el apartado 4.2, gracias a dividir el análisis dinámico de la bicicleta más el ciclista en tres sistemas, se ha logrado obtener nueve ecuaciones con nueve incógnitas, por lo que es posible resolver el sistema. La incógnita de mayor interés es el par de la rueda trasera, ya que ese par es el que deberá proporcionar el ciclista para lograr las condiciones deseadas. Los resultados obtenidos en cada situación se pueden observar en la siguiente tabla:

	<b>Pendiente nula:</b> $\beta = 0;$ $v = 25 \text{ km/h}$	<b>Pendiente moderada:</b> $\beta = 1,72 ;$ $v = 10 \text{ km/h}$	<b>Pendiente considerable:</b> $\beta = 6,84;$ $v = 6 \text{ km/h}$
$F_{e1} \text{ [N]}$	0	0,65	2,57
$F_{e2} \text{ [N]}$	6,15	26,49	101,69
$F_{e3} \text{ [N]}$	401	415,37	466,95
$F_{e4} \text{ [N]}$	427,94	413,19	356,09
$F_{\tan 1} \text{ [N]}$	0	0	0
$N_1 \text{ [N]}$	449,52	434,76	377,52
$F_{\tan 2} \text{ [N]}$	6,15	27,28	104,85
$N_2 \text{ [N]}$	427,49	441,86	493,24
$\Gamma \text{ [N}\cdot\text{m]}$	2,03	9	34,6

Tabla 5. Resultados análisis dinámico para el sistema ciclista y bicicleta.

Según los datos de *Gestión Técnica del Tráfico* [5] de la Dirección General de Tráfico (DGT\*), el coeficiente de fricción entre pavimentos de tierra dura y neumáticos se puede considerar de  $\mu=0,65$ . Con este coeficiente de fricción se puede comprobar que la hipótesis de no deslizamiento de las ruedas es correcta, ya que en todos los casos se tiene en las ruedas que:

$$F_{tan} \leq \mu N$$

La situación más cercana al deslizamiento es para el caso de mayor pendiente en la rueda trasera, pero se cumple con un margen bastante amplio:

$$104,85 \text{ N} \leq 320,61 \text{ N}$$

Dado que el centro de masas está más próximo a la rueda trasera, a medida que la pendiente aumenta, se genera un momento que tiende a provocar que la rueda delantera pierda el contacto con el suelo, por lo que tiene sentido que la  $N_1$  se reduzca con el aumento de pendiente mientras que la  $N_2$  aumente para mantener el equilibrio dinámico. Las fuerzas de enlace  $F_3$  y  $F_4$  aumentan y disminuyen en función de la pendiente en la misma medida que lo hacen las normales  $N_1$  y  $N_2$ , por lo que se puede concluir que son fuerzas dependientes.

La fuerza tangencial  $F_{tan 1}$  es cero en las tres situaciones debido a que la rueda delantera no presenta tracción como en el caso de la rueda trasera, por lo que no debe darse una fuerza de enlace que garantice la rotación de la rueda.

La fuerza que más varía (aumentando) en el eje del movimiento (eje 1) en función de la pendiente es la fuerza tangencial  $F_{tan 2}$ . Dado que dicha fuerza es la que garantiza que no se produzca deslizamiento debido al par en la rueda motriz permitiendo de esta manera el avance de todo el sistema, tiene sentido que aumente de forma considerable con la pendiente. Es coherente también que el par requerido para avanzar a mayor pendiente aumente (tal y como se da), ya que con el aumento de pendiente una parte de la fuerza del peso, la cual es la fuerza más grande del sistema, actúa en el eje de movimiento yendo en contra al avance en los casos estudiados (pendiente positiva).

### 5.2.2. Sistema bicicleta y carro

Los resultados se han obtenido de la misma forma que en el apartado anterior y aplicando las mismas condiciones de pendiente y velocidad para poder posteriormente compararlos con los del apartado anterior. Los resultados del sistema bicicleta y carro se pueden observar en la tabla siguiente:

	<b>Pendiente nula:</b> $\beta = 0$ ; $v = 25 \text{ km/h}$	<b>Pendiente moderada:</b> $\beta = 1,72$ ; $v = 10 \text{ km/h}$	<b>Pendiente considerable:</b> $\beta = 6,84$ ; $v = 6 \text{ km/h}$
$F_{drag} \text{ [N]}$	6,15	0,98	0,35
$F_{drag n} \text{ [N]}$	6,11	0,98	0,35
$F_{e1} \text{ [N]}$	0	0,65	2,57
$F_{e2} \text{ [N]}$	12,27	42,47	161,65
$F_{e3} \text{ [N]}$	523,56	545,35	629,44
$F_{e4} \text{ [N]}$	437,52	415,64	327,44
$F_{e5} \text{ [N]}$	6,11	15,98	59,96
$F_{e6} \text{ [N]}$	132,13	132,42	133,84
$F_{e7} \text{ [N]}$	0	1,06	4,21
$F_{e8} \text{ [N]}$	332,87	332,36	327,85
$F_{tan 1} \text{ [N]}$	0	0	0
$F_{tan 2} \text{ [N]}$	12,27	43,26	164,81
$F_{tan 3} \text{ [N]}$	0	0	0
$N_1 \text{ [N]}$	459,1	437,22	348,87
$N_2 \text{ [N]}$	550,04	571,83	655,73



$N_3$ [N]	368,18	367,66	362,91
$I$ [N·m]	4,05	14,28	54,39

Tabla 6. Resultados análisis dinámico para el sistema completo bicicleta y carro.

De igual forma que en el apartado 5.2.1, se cumple la hipótesis de no deslizamiento. La situación más próxima al deslizamiento en este caso se da en la configuración de mayor pendiente para la rueda delantera de la bici, donde se tiene:

$$0N \leq 226,77N$$

Por lo que esta situación se encuentra muy lejos de la situación de deslizamiento.

Las mismas conclusiones extraídas en el apartado anterior son válidas para este apartado, tanto en el caso de la bicicleta como del carro.

Se puede observar que a pesar de presentar alturas y masas diferentes, la fuerza aerodinámica de *drag* del niño y del ciclista son muy similares en las tres situaciones. La situación de mayor diferencia es la de pendiente nula. Esto se debe a que tanto las velocidades estudiadas como el área frontal del ciclista y del niño son reducidas, por lo que la fuerza de *drag* no presenta un valor muy elevado y de ahí que no haya gran diferencia. Si se estudiaran casos de mayor velocidad, la diferencia de dicha fuerza entre el ciclista y el niño sería más notable. En el ciclismo de velocidad, en las que se alcanzan velocidades superiores a los 50 km/h, la fuerza aerodinámica de *drag* supone el 90% de la resistencia total, lo que hace que la posición adoptada sea clave para adquirir mayor velocidad<sup>23</sup>. En velocidades bajas como las estudiadas este hecho no es tan relevante como reflejan los resultados obtenidos

### 5.3. Comparación de resultados

La siguiente tabla muestra la diferencia en cada situación, con carro y sin carro, del par que debe proporcionar el ciclista:

<sup>23</sup> Información extraída del artículo *Aerodynamic analysis of different cyclist hill descent positions* [6], de los autores Bert Blocken, Thijs van Druenen, Yasin Toparlar y Thomas Adrianne.

	Pendiente nula	Pendiente moderada	Pendiente considerable
Sin carrito	2,03 Nm	9 Nm	34,6 Nm
Con carrito	4,05 Nm	14,28 Nm	54,39 Nm
	0,99	0,58	0,57

Tabla 7. Comparación del par en tanto por uno que el ciclista debe ejercer con carro respecto sin carro.

	Pendiente nula	Pendiente moderada	Pendiente considerable
Par sin carrito	2,03 Nm	9 Nm	34,6 Nm
		3,46	16,04
Par con carrito	4,05 Nm	14,28 Nm	54,39 Nm
		2,52	12,42

Tabla 8. Comparación del par en tanto por uno que el ciclista debe ejercer en cada situación respecto a la situación de pendiente nula.

Como se puede observar en los resultados, lo que más incide en el par a ejercer por el ciclista es la pendiente, lo cual tiene sentido porque lo que más cuesta vencer en el ciclismo es el propio peso del ciclista. Por este mismo motivo, cuando el ciclista debe arrastrar el carrito también debe ejercer un par mayor, ya que el peso que ha de arrastrar aumenta. El objetivo a lograr con la instalación del motor es reducir este aumento del par necesario debido a los efectos del carrito y la pendiente.

## 5.4. Resultados de la fuerza y cadencia\* del ciclista

El modelo *Rockrider 5.2* dispone de ocho velocidades y tres platos. El número de dientes de cada velocidad es de 11x12x14x16x18x21x26x32. El número de dientes por plato es de 40x30x22.

En función de la marcha y el plato seleccionado (debido a la relación de radios), se requiere

la siguiente fuerza para cada situación calculada en apartado anterior<sup>24</sup>:

- Pendiente nula:  $\beta = 0^\circ$  ;  $v = 25 \text{ Km/h}$  .

	Plato 1	Plato 2	Plato 3
Marcha 1	0,24	0,32	0,43
Marcha 2	0,29	0,40	0,53
Marcha 3	0,36	0,49	0,66
Marcha 4	0,42	0,58	0,77
Marcha 5	0,47	0,65	0,86
Marcha 6	0,54	0,74	0,99
Marcha 7	0,63	0,86	1,15
Marcha 8	0,69	0,94	1,25

	Plato 1	Plato 2	Plato 3
Marcha 1	0,47	0,65	0,86
Marcha 2	0,58	0,79	1,06
Marcha 3	0,72	0,98	1,31
Marcha 4	0,84	1,15	1,53
Marcha 5	0,95	1,29	1,72
Marcha 6	1,08	1,48	1,97
Marcha 7	1,26	1,72	2,30
Marcha 8	1,38	1,88	2,50

Tablas 9 y 10. Fuerza del pedal en  $N$  sin carro y con carro respectivamente en la condición uno.

- Pendiente moderada:  $\beta = 1,72^\circ$  ;  $v = 10 \text{ Km/h}$  .

<sup>24</sup> Resultados obtenidos a través de Excel. Cálculos visibles en el fichero Excel adjunto *Fuerzas y cadencia*.

	Plato 1	Plato 2	Plato 3
Marcha 1	1,05	1,43	1,91
Marcha 2	1,29	1,77	2,35
Marcha 3	1,60	2,19	2,91
Marcha 4	1,87	2,55	3,40
Marcha 5	2,10	2,87	3,83
Marcha 6	2,40	3,28	4,37
Marcha 7	2,81	3,83	5,10
Marcha 8	3,06	4,17	5,56

	Plato 1	Plato 2	Plato 3
Marcha 1	1,67	2,28	3,03
Marcha 2	2,05	2,80	3,73
Marcha 3	2,54	3,47	4,62
Marcha 4	2,97	4,05	5,39
Marcha 5	3,34	4,55	6,07
Marcha 6	3,81	5,20	6,94
Marcha 7	4,45	6,07	8,09
Marcha 8	4,86	6,62	8,8

Tablas 11 y 12. Fuerza en *N* del pedal sin carro y con carro respectivamente en la condición dos.

- Pendiente considerable:  $\beta = 6,84^\circ$  ;  $v = 6 \text{ Km/h}$  .

	Plato 1	Plato 2	Plato 3
Marcha 1	4,04	5,51	7,35
Marcha 2	4,98	6,79	9,05
Marcha 3	6,16	8,40	11,20

	Plato 1	Plato 2	Plato 3
Marcha 1	6,36	8,67	11,56
Marcha 2	7,82	10,67	14,23
Marcha 3	9,69	13,21	17,61

Marcha 4	7,19	9,80	13,07
Marcha 5	8,09	11,03	14,71
Marcha 6	9,24	12,60	16,81
Marcha 7	10,78	14,71	19,61
Marcha 8	11,76	16,04	21,39

Marcha 4	11,30	15,41	20,55
Marcha 5	12,71	17,34	23,12
Marcha 6	14,53	19,81	26,42
Marcha 7	16,95	23,12	30,82
Marcha 8	18,49	25,22	33,62

Tablas 13 y 14. Fuerza en  $N$  del pedal sin carro y con carro respectivamente en la condición tres.

Ninguna de las fuerzas calculadas está fuera del alcance de una persona en buenas condiciones físicas, ya que la fuerza máxima de pedaleo que se puede ejercer es superior al peso del ciclista, ya que uno se puede poner de pie sobre un pedal y dejar todo su peso sobre el pedal más la fuerza que puede ejercer en favor del peso gracias a empujar su cuerpo hacia abajo con los brazos cogidos al manillar. Sin embargo, se ha de tener en cuenta que estas fuerzas no son fuerzas puntuales, sino que son fuerzas que se han de mantener constantes a lo largo del tiempo que dure la salida en bicicleta para seguir garantizando el movimiento en dichas condiciones, por lo que el desgaste del ciclista hace que a pesar de ser fuerzas asequibles, sea difícil mantener el ritmo. La presencia del carro dificulta mantener dichas condiciones, ya que al aumentarse la fuerza necesaria el desgaste es mayor. Hay que recordar que, tal y como se ha dicho en el apartado de hipótesis y simplificaciones, se han realizado los cálculos como si la fuerza y la velocidad de pedaleo fuesen constantes.

A pesar de que la bicicleta permite realizar todas las combinaciones posibles entre platos y marchas y por ello se haya calculado la fuerza en cualquier combinación, hay combinaciones que no son recomendadas debido a que se fuerza a la cadena a trabajar de forma cruzada, lo que aumenta el desgaste de los dientes tanto de las marchas como de los piñones y facilita el imprevisto de que la cadena salte y se salga de los piñones, por lo que se necesite detener la marcha para reparar esta avería. Las combinaciones típicas se muestran en la siguiente figura:

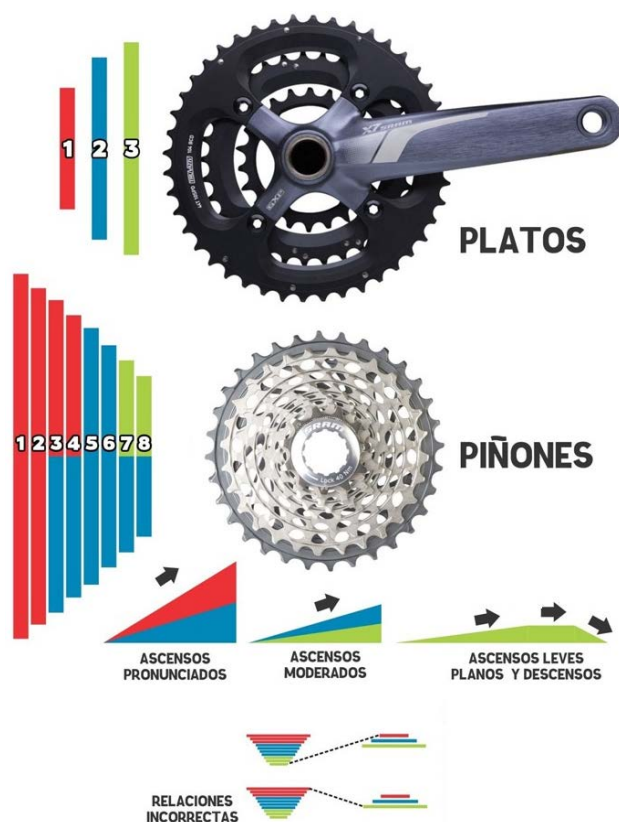


Fig.16.Relaciones de marchas recomendadas. Imagen extraída de la página web *labicicleta.info*

Para cada condición de velocidad se ha calculado únicamente la cadencia de las relaciones de marchas que tienen sentido en función de la fuerza requerida y el correcto funcionamiento de la cadena. Los resultados obtenidos son:

$v = 25 \text{ km/h}$			$v = 10 \text{ km/h}$		$v = 6 \text{ km/h}$	
	Platos			Platos		Platos
Marchas	2	3	Marchas	2	Marchas	1
5	107,11	80,33	4	48,20	1	70,11
6	93,72	70,29	5	42,84	2	56,96
7	80,33	60,25	6	37,49	3	46,01
8	73,64	55,23				

Tabla 15. Cadencia para cada condición de velocidad. Resultado en revoluciones por minuto.

Los resultados obtenidos son perfectamente asequibles a excepción de la cadencia derivada de la combinación de la marcha 5 con el plato 2 para la velocidad de 25 *km/h*, ya que no se recomienda una cadencia de más de 100 revoluciones por minuto debido a un consumo de energía excesivo por parte del ciclista. Cadencias tan elevadas se utilizan únicamente en los gimnasios para mejorar la eficiencia de pedaleo y la potencia, manteniendo una velocidad de pedaleo tan elevada únicamente durante intervalos de cinco minutos aproximadamente ya que el desgaste es demasiado elevado para mantener dicha velocidad.

## 6. Motor

Una vez analizados los tipos de motores eléctricos que existen y las fuerzas que el ciclista debe aportar en las tres condiciones definidas, se puede realizar el estudio del motor que mejores prestaciones presente para lograr complementar la acción del ciclista y verse de esta manera reducido su esfuerzo, lo cual es el objetivo principal del proyecto. Dado que únicamente se han evaluado tres condiciones sin presentar en ninguna de ellas una pendiente exagerada, pero pudiendo comprobar que el aumento del par necesario se ve altamente influenciado por la pendiente, al motor se le exige que pueda ejercer un par que sea un 20% superior al par mayor necesario en las situaciones calculadas, y esto es en la situación de pendiente considerable con carro. Por tanto, el motor debe ejercer un par máximo superior a  $65,3 \text{ Nm}$ , que redondeando para que la cifra sea exacta el par debe ser mayor a  $65 \text{ Nm}$ . De esta manera se obtienen garantías de que la ayuda que proporcione el motor sea suficiente en situaciones más adversas que las estudiadas.<sup>25</sup>

### 6.1. Características deseadas

Para poder realizar una buena elección, lo primero de todo es definir qué es lo que se requiere del motor para poder así concretar la búsqueda. Existe gran variedad y accesibilidad de motores eléctricos en el mercado de hoy en día, por ello es importante definir de forma concreta los requisitos a cumplir por parte del motor.

- **Sostenibilidad:** El motor eléctrico es considerado un motor limpio dado que no produce emisiones de  $\text{CO}_2$ . Sin embargo, las baterías eléctricas pueden llegar a ser muy contaminantes si se les da un mal uso. A pesar de ser así, este hecho no va a influir en la elección del motor, aunque se ha querido remarcar para concienciar. El hecho de que no se tenga en cuenta es debido a la poca disposición de tipos de baterías eléctricas para bicicletas, ya que en su gran mayoría estas son de litio, dado que las baterías de litio son consideradas actualmente como las más eficientes y son menos contaminantes que las de Níquel-Cadmio, que hasta la fecha eran las más utilizadas debido a su bajo coste.
- **Potencia:** Visto los requisitos legales, se pretende que una vez instalado el motor, la bicicleta sea considerada una bicicleta eléctrica y no un ciclomotor, para poder utilizarse sin necesidad de registrar el vehículo ni de tener un permiso de conducir. Por ello, el motor debe:

---

<sup>25</sup> Gracias a los archivos MATLAB adjuntos se pueden calcular de forma rápida nuevas condiciones. Por ejemplo, para una pendiente del 30% y una velocidad de  $6 \text{ km/h}$  se requiere un par  $130,84 \text{ Nm}$ .



- No superar una potencia continua de 250 W.
  - Proporcionar asistencia únicamente mientras el ciclista pedalee (sistema *pedelec*).
  - Detenerse cuando se supere la velocidad de 25 km/h.
  - El conjunto motor y batería debe presentar un peso menor a 25 kg, siendo a poder ser el mínimo posible.
- 
- **Par máximo:** Tal como se ha mencionado al inicio del capítulo, al motor se le exige que realice un par máximo superior a 65 Nm.
  - **Localización del motor:** Dado que la bicicleta a utilizar es una MTB, y a pesar de que el principal objetivo de motorizarla es reducir el esfuerzo a la hora de arrastrar el carro, se va a seguir utilizando para excursiones por lo que es preferible que el motor esté ubicado en el eje del *pedalier* para poder así beneficiarse en mayor medida de la relación de marchas. En caso de no ser posible, se aceptará también motores en el buje de la rueda trasera. Dado que en los senderos de montaña es frecuente que la rueda delantera se levante y pierda el contacto con el suelo, no se van a contemplar los motores en el buje de la rueda delantera. Por este mismo motivo, en el análisis dinámico no se ha contemplado la situación de que haya momento en la rueda delantera.
  - **Precio:** Siempre que se cumpla con las anteriores condiciones, se pretende que el coste de adquisición sea el menor posible para hacer frente al precio de las bicicletas eléctricas que ofrece el mercado, ya que si el precio final es superior tendría más sentido adquirir una bicicleta eléctrica que no realizar la instalación del motor.

## 6.2. Estudio de mercado

Dado el amplio número de motores eléctricos disponibles, únicamente se reflejan en este apartado aquellos que cumplen de forma más precisa las características mostradas en el apartado anterior y que por tanto se consideran candidatos a ser elegidos como el motor más óptimo. Para la selección de los motores, se han diferenciado dos formatos de producto:

1. Kits de conversión: Este tipo de ofertas del mercado incluyen todo lo necesario para

la instalación: el motor, los sensores y la batería.

2. Por partes: Búsqueda de motores que no incluyen baterías, y por tanto búsqueda de baterías compatibles con dicho motor por separado.

#### Kits de conversión:

- **Kit ebici motor central 250W con batería 6443.** Este kit incluye:
  - Motor Bafang BBS02 250 W
  - Batería de celdas Samsung de 36 Voltios (V) y 10,4 Amperios hora (Ah)
  - Sensor integrado en el eje del motor
  - Controlador C4 programable con 5 niveles de potencia
  - Cargador

El motor Bafang BBS02 permite suministrar un par máximo de 80 *Nm* y tiene un peso de 7 kg. El precio de este kit es de 799€.



---

Fig.17. Motor Bafang BBS02. Imagen extraída de *ebicishop.eu*

- **Kit motor central 36 V batería botella 17 Ah.** Este kit incluye:
  - Motor TSDZ2-36V250 W
  - Batería en forma de botella<sup>26</sup> de 36 V y 17 Ah de litio
  - Controlador programable de dos niveles de potencia
  - Cargador

El motor TSDZ2 de 250 W permite suministrar un par máximo de 80 *Nm*, y tiene un

---

<sup>26</sup> Las baterías con forma de botella se adhieren a la barra inferior del cuadro.

peso de 6,6 kg. El precio de este kit es de 995€.



Fig.18. Motor Tongsheng TSDZ2. Imagen extraída de *bikelec.es*

#### Por partes:

#### Motores:

- **Motor central Bafang BBS02.** Características:
  - Potencia: 250 W
  - Peso: 4 kg
  - Controlador C965 de siete niveles de potencia
  - Precio: 550€
- **Motor central Tongsheng TSDZ2.** Características:
  - Potencia 250 W
  - Peso 3,6 kg
  - Controlador VLCD 5 de cuatro niveles de potencia
  - Precio: 589€

#### Baterías:

- **Batería Samsung de litio.** Características:
  - Voltaje: 36 V
  - Capacidad: 16 Ah
  - Peso: 4,85 kg
  - Precio: 540€
  - Forma: Botella



---

Fig.19. Batería Samsung de litio. Imagen extraída de *ebicishop.eu*

- **Batería Panasonic de litio.** Características:

- Voltaje: 36 V
- Capacidad: 8,7 Ah
- Peso: 3 kg
- Precio: 405€
- Forma: Botella



---

Fig.20. Batería Panasonic de litio. Imagen extraída de *biobike.es*

- **Batería E-bike Yamaha de litio:**

- Voltaje: 36 V
- Capacidad: 13,8 Ah
- Peso: 2,8 kg
- Precio: 764€
- Forma: Botella



Fig.21. Batería Yamaha de litio. Imagen extraída de *bicishop.eu*

Como puede observarse, los motores seleccionados coinciden tanto en los kits de conversión como en la construcción de motores por partes. Esto se debe a que los motores Bafang y Tongsheng no tienen competencia entre los motores de 250 W de auto instalación en bicicletas debido a su reducido precio y sus buenas prestaciones. Durante el estudio de mercado se han analizado también motores de más alta gama, que son los que presentan las MTB eléctricas, como es el caso del motor **Bosch Performance Cruise**, o el **SHIMANO STEPS E6100**. Sin embargo, estas opciones se descartaron debido a su excesivo precio, que superaban los 1500€ en ambos casos. Los motores para instalar en el buje de la rueda trasera tampoco se han añadido dado que la potencia que proporcionan es menor. El que mejores prestaciones presentaba era el motor **RM9.2** de **ANSMANN**, el cual proporciona un par máximo de 60 Nm y cuatro niveles de potencia. Sin embargo, dado el precio de 730€ con batería incluida, el cual es un precio similar al de los motores situados en el eje del *pedalier*, y que no supera la condición exigida de presentar un par superior a 65 Nm, esta opción también se ha descartado. Otro hecho a tener en cuenta por el que se han descartado los motores en el buje de la rueda es que necesitan llantas especiales para poderse instalar, lo cual sube el precio y amplía el tiempo de montaje.



Fig.22. Motor Bosch, SHIMANO y RM9.2 respectivamente. Imágenes extraídas de [bosch-ebike.com](http://bosch-ebike.com), [bike.shimano.com](http://bike.shimano.com) y [ansmann.de](http://ansmann.de)

### 6.3. Elección

La elección del motor a instalar se basa en un análisis de las características de los diferentes motores presentados en el estudio de mercado, los cuales superaban los requisitos exigidos. En el propio estudio se ha realizado un primer filtrado presentándose únicamente aquellos motores que mostraban mejores prestaciones. Las características analizadas son:

- Potencia. La determina el motor con el par máximo que puede presentar.
- Autonomía. La determina la batería en función de los amperios hora que puede suministrar, a más amperios hora presente la batería más autonomía tendrá en las mismas condiciones.
- Niveles de asistencia. Los proporciona el controlador.
- Precio.

Antes de empezar el análisis propiamente dicho, se ha hecho un análisis reducido para las baterías que se adquieren a parte para concretar cuál es la mejor opción.

Batería	Autonomía [Ah]	Precio [€]
Samsung	16	540
Panasonic	8,7	405
Yamaha	13,8	764

Tabla 16. Comparación de las diferentes baterías.

Dado el elevado precio, la batería Yamaha queda totalmente descartada, además de que la batería Samsung presenta un precio menor y una mayor autonomía. La batería Samsung presenta una autonomía de casi el doble de tiempo en comparación con la Panasonic, siendo la diferencia de precio de 135€, por lo que en cuanto a las baterías la elección escogida es el modelo Samsung.

Una vez seleccionada la batería, se puede realizar la elección completa del motor a instalar.

Motor	Potencia máxima [Nm]	Autonomía [Ah]	Asistencia (número de niveles )	Precio [€]
Kit Bafang	80	10,4	5	799
Kit Thongsheng	80	17	2	995
Bafang con batería Samsung	80	16	7	1090
Thongsheng con batería Samsung	80	16	4	1129

Tabla 17. Comparación de los diferentes motores.

Tal y como se puede observar en la tabla 15, las cuatro opciones posibles proporcionan un par máximo de 80 Nm, superando el mínimo exigido de 65 Nm. Para las situaciones estudiadas este par es más de lo que se necesita, ya que el par máximo del motor supera al par máximo necesario en la situación más exigente. Sin embargo, tal como se ha mencionado anteriormente es fácil encontrarse pendientes mayores a las estudiadas, y con los resultados obtenidos se ha podido determinar que la pendiente es la causa que más aumenta el par requerido. Por este motivo se ha fijado el mínimo de 65 Nm, pero no se ha fijado un máximo ya que por medio del controlador se puede regular la asistencia que proporciona el motor en cada nivel. Dado que todas las opciones presentan el mismo par, esta característica no tiene influencia en la elección. La autonomía es un factor muy importante, ya que a mayor autonomía más tiempo puede mantenerse el motor proporcionando asistencia, hecho que es de vital importancia ya que las excursiones de montaña suelen ser duraderas. Por este motivo, a pesar de que sea la opción más económica, el kit de conversión Bafang se ha descartado, ya que la autonomía que presenta es muy inferior al resto de opciones, en concreto un 53,85% más baja que la siguiente opción con menos autonomía. Por tanto las opciones a discutir son el kit de conversión

Thongsheng y los motores Bafang BS02 y Thongseng TSDZ2 ambos con batería Samsung. La diferencia de autonomía entre la batería Samsung y la incluida en el kit es únicamente de un *Ah*, por lo que se considera irrelevante. Sin embargo, la diferencia en cuanto a los niveles de asistencia programables no se puede considerar de igual manera. Los niveles de asistencia se pueden programar fácilmente y siguiendo las instrucciones que se incluyen al adquirir el producto a través del controlador. El nivel de asistencia determina hasta qué punto puede ayudar el motor, fijando una velocidad y un par máximo que puede desarrollar el motor en dicho nivel, por lo que determina el nivel de ejercicio físico que desarrolla el ciclista. Por tanto que el motor presente diferentes niveles de asistencia es una característica importante a tener en cuenta. El kit Thongsheng únicamente presenta dos niveles de asistencia programables, por lo que presenta muy poca flexibilidad. Un mínimo de cuatro niveles se considera necesario para presentar así más flexibilidad y precisión a la hora de determinar la ayuda que se quiere recibir del motor. Visto esto, únicamente quedan como opciones los motores Bafang BS02, que presenta siete niveles de asistencia, y el motor Thongseng TSDZ2 con cuatro niveles. Es cierto que siete niveles son más de lo necesario, pero siempre se pueden programar menos del máximo permitido, y dado que el motor Thongsheng tiene un precio 39€ mayor, la opción escogida es el motor **Bafang BS02 con batería Samsung de litio**. Además una característica a destacar del motor Bafang BS02 sobre el Thongseng TSDZ2 es la presencia de aletas de refrigeración, las cuales ayudan a disipar el calor cuando el motor suministra mucha potencia mejorando así notablemente la eficiencia y reduciendo las pérdidas.



## 7. Impacto económico

El impacto económico referente a este proyecto se puede dividir en costes de personal y en costes del equipamiento utilizado, ya que únicamente se ha realizado un estudio teórico, sin costes de material dado que no se ha adquirido ninguno ni tampoco se ha realizado ningún proceso de montaje. El coste total se compone de la suma del valor de las horas empleadas por el personal más el valor de los equipos de trabajo utilizados.

### 7.1. Coste de personal

Los costes de personal tienen en cuenta las horas invertidas por parte del trabajador para el desarrollo del proyecto y las horas invertidas por parte del director del proyecto para guiar el estudio.

Las horas dedicadas al proyecto presentan un coste variado en función de la etapa en que se encuentran. Se han considerado tres etapas diferentes:

1. Formación e investigación. Esta etapa hace referencia a la recopilación de información, tanto de productos y conocimientos necesarios acerca del tema a tratar como la determinación de parámetros y cálculos necesarios para el estudio realizado.
2. Análisis. Esta etapa hace referencia a la comprensión de los resultados obtenidos y a la determinación del modelo escogido en base a la información recopilada.
3. Presentación. En esta etapa el tiempo se emplea en transmitir la información y los resultados de forma clara y entendible para facilitar su comprensión, así como la realización de la memoria.

Las horas dedicadas por parte del director del proyecto van a parte de las etapas nombradas anteriormente.

### 7.2. Coste de equipamiento

Como coste de equipamiento se tienen en cuenta únicamente dos costes, el coste asociado al ordenador empleado para desarrollar las tareas del proyecto, y la licencia del programa de cálculo matemático MATLAB. El resto de herramientas utilizadas son de uso libre, por lo que no implican ningún coste adicional.

Costes de personal			
Etapa	Precio/hora	Horas dedicadas	Coste total
Formación e investigación	30€	125	3750€
Análisis	40€	90	3600€
Presentación	25€	80	2000€
Revisión del director	80€	14	1120€
Coste de equipamiento		Ordenador	131,6€
		Licencias	800€
Coste final del proyecto			10281,6€

Tabla 16. Tabla de costes del proyecto.

El valor inicial del ordenador era de 980€. Teniendo en cuenta un coste de mantenimiento del 10% anual con respecto al valor inicial, usándolo 1200 horas al año, y teniendo en cuenta que el ordenador se utiliza un 90% del tiempo dedicado al proyecto, se tiene:

$$309h \times 0,9 \times \frac{980€ \times 0,1}{1200h} = 22,71€$$

Al coste anterior se le debe sumar la amortización del ordenador. El uso aproximado del ordenador es de 300 días al año, habiéndose adquirido hace tres años y dándole un uso aproximado de 100 días durante el proyecto, se tiene:

$$100d \times \frac{980€}{3años \times 300d} = 108,89€$$

Por tanto, el coste total del ordenador durante el proyecto es:

$$22,71€ + 108,89€ = 131,6€$$

La licencia de MATLAB adquirida es la licencia anual, con un coste de 800€

## Conclusiones

Una vez concluido el proyecto, se ha podido entender cómo la bicicleta ha ido cogiendo fuerza en nuestra sociedad gracias a su evolución a nivel práctico, mecánico y en términos de seguridad y movilidad debidos a la experiencia acumulada del paso de los años. Una vez implantado el modelo convencional que exprime al máximo las ventajas de la bicicleta como medio de transporte y como actividad lúdica, la implementación del motor eléctrico acerca la bicicleta a más usuarios haciendo su uso más asequible.

Gracias a la comprensión de estos hechos, el estudio de la dinámica y la transmisión de velocidades resaltan el esfuerzo requerido para moverse en bicicleta, especialmente en la condición de arrastrar un carro con un niño, mostrando no la necesidad de una asistencia a la hora de pedalear en las condiciones estudiadas, puesto que el par máximo requerido en la rueda motriz es de  $54,39 \text{ Nm}$  y este es asequible con la relación de marchas adecuada llegándose a necesitar únicamente una fuerza de  $6,36 \text{ N}$ , pero sí resaltando las ventajas que esta aportaría, reduciendo el esfuerzo requerido en condiciones complejas permitiendo una relación de marchas mayor y por tanto una cadencia menor, garantizando de esta manera una actividad más cómoda.

El estudio de los motores existentes que se pueden instalar en MTB no eléctricas y sus características, permiten concluir que una buena elección aporta las ventajas mencionadas en el párrafo anterior sin la necesidad de una inversión excesiva. La elección planteada, el motor Bafang BS02 con batería Samsung de litio presenta un par máximo de  $80 \text{ Nm}$ , con una autonomía de  $16 \text{ Ah}$ , siete niveles de asistencia programables y un precio de  $1090\text{€}$ .

## Trabajos futuros

Como trabajos futuros se considera interesante la realización práctica de la instalación del motor seleccionado, dado que el proyecto únicamente evalúa el marco teórico de la bicicleta antes de la instalación. Una vez instalado el motor, el estudio de la nueva dinámica requerida por el ciclista pondría de relieve las ventajas que el motor realmente aportaría, evaluando si realmente un motor eléctrico es útil o por lo contrario su ayuda es insuficiente o molesta. También se podría estudiar las configuraciones de niveles de asistencia más adecuadas, ampliando la complejidad y el número de las situaciones a estudiar.

## Agradecimientos

A mi hermano Miguel, quien ha sido realmente la auténtica motivación de este trabajo.

## Bibliografía

### Referencias bibliográficas

- [1] *REAL DECRETO 2822/1998*. Boletín Oficial del Estado, Madrid, España, 26 de enero de 1999.
- [2] *REGLAMENTO (UE) No 168/2013 DEL PARLAMENTO EUROPEO Y DEL CONSEJO*. Diario Oficial de la Unión Europea, Bruselas, Bélgica, 15 de enero de 2013.
- [3] VITTORE COSSALTER. *Motorcycle dynamics*. Lulu, Gran Bretaña (2006). 360 p. ISBN: 978-1-4303-0861-4
- [4] PIERRE DEBRAUX, FREDERIC GRAPPE, ANELIYA V. MANOLOVA y WILLIAM BERTUCCI. *Aerodynamic drag in cycling: Methods of assessment*. Sports biomechanics, Reims, Francia, septiembre de 2011.
- [5] RICARDO GARCÍA GONZÁLEZ. OEP, especialidad: *Gestión Técnica del Tráfico*, tema 5. Madrid 2013.
- [6] BERT BLOCKEN, THIJS VAN DRUENEN, YASIN TOPARLAR, THOMAS ADRIANNE. *Aerodynamic analysis of different cyclist hill descent positions*. Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics, Leuven, Bélgica, Agosto 2018.

### Bibliografía complementaria

CONTINI, RENATO, RUDOLFS J. DRILLIS, and MAURICE BLUESTEIN. *Determination of body segment parameters*. Octubre de 1963.

DAVID A. WINTER. *Biomechanics and motor control of human movement*. JOHN WILEY & SONS, INC, Waterloo, Ontario, Canadá. 370 p. ISBN: 978-0-470-39818-0

PACO NAVARRO, JAVIER RUI-WAMBA, ALEX FERNÁNDEZ CAMPS, ORIOL ALTISENCH, CRISTINA GARCÍA. *La ingeniería de la bicicleta*. Fundación ESTEYCO, España, diciembre de 2010. 277 p. ISBN: 978-84- 933553-5-7

Varios autores. Biobike, 29 de marzo de 2019: <https://www.biobike.es/2019/03/29/los-mejores-motores-para-bicicleta-electrica-2019/>